প্রাথমিক জ্যামিতির অঙ্কনের সৌন্দর্য ও যুক্তিবিদ্যার শ্রেষ্ঠ নিদর্শন

সুশীল চন্দ্র দাশগুপ্ত



পশ্চিমবঙ্গ রাজ্য পুস্তক পর্ষদ



ভূমিকা

অনেক সময় গল্পচ্ছলে বা কথার ছলে বহু শিক্ষক কিংবা শিক্ষিকাকে বলেছি যে তাদের টিচার্স ট্রেনিং কলেজগুলিকে আমার খুব ভাল লেগেছে এবং যখনই কর্ম উপলক্ষে কোন শিক্ষক-শিক্ষণ মহাবিদ্যালয়ে যাওয়ার সুযোগ হয়েছে আমি অবশ্যই সে মনোভাবের জন্য সুযোগ হাতছাড়া করি নি। কিন্তু প্রত্যুত্তরে অনেকেই বলেছেন যে ওদের পড়াশুনায় তাঁরা নিজেরা বিশেষ গুরুত্ব দেন নাই বা নতুন কিছু তাঁরা শিখতে পারেন নাই। তাঁদের বক্তব্যের সারাংশ লিখতে গেলে লিখতে হয় যে তাঁদের যে বিষয়বস্তু সেখানে পড়ান হয় সেগুলি সৃজনশীল নয় বা সেগুলির প্রয়োগের উপযুক্ত ক্ষেত্র নাই। অথচ বিদ্যালয়ের এমন কি প্রাথমিক স্তরেও সৃজনাত্মক পাঠদানের কথা বলা আছে, যাতে প্রাথমিক ছাত্রছাত্রীরা গোড়া থেকেই মনকে সৃজনমুখী করে ফেলতে পারে। মাধ্যমিক বা উচ্চমাধ্যমিক বা তারও কিছু উঁচুস্তরে ত নিশ্চয়ই ছাত্রছাত্রীদের যুক্তিনির্ভর এবং সৃজনশীল হতে শেখাতে হবে। এই উদ্দেশ্যে জ্যামিতিকে বেছে নিয়ে বিদ্যালয়স্তরে কিভাবে সৃজনশীল করা সম্ভব তা দেখান হয়েছে। বিষয়বস্তুর যুক্তিগুলি দাঁড় করাবার জন্য অনেক সময় সামান্য মহাবিদ্যালয় স্তরের গণিত নিয়ে আসতে হয়েছে ও উচ্চমাধ্যমিক মানের থেকে তা খুব বেশী দূরে কখনই যেতে হয়নি। এতে বিষয়বস্তুর সরসতা রক্ষিত করতে সাহায্য করেছে। কিছুকাল জ্যামিতি বিষয়ে আমাদের মধ্যে উৎসাহের অভাব পরিলক্ষিত হচ্ছে। এ বইটি উপেক্ষিত বিষয়টিকে পুনরুজ্জীবিত করার একটি সৎচেষ্টা ও এর সৃজনশীল দিকে দৃষ্টি ফেরানর প্রয়োজনের উপলব্ধি।

জ্যামিতি যে শুধু বীজগণিত বা কলনবিদ্যায় দরকারে লাগে তা নয়, এ গতি-বিজ্ঞান বা স্ফটিকগঠনপ্রকৃতি বুঝতেও আবশ্যিক। স্ফটিকগঠনপ্রকৃতি বুঝতে অবশ্য গ্রুপ বা দলের বীজগণিত তথা জ্যামিতি বিশেষ কাজে লাগে। আবার সংখ্যাবিজ্ঞান বা সম্ভাব্যবিজ্ঞানে জ্যামিতি পরীক্ষা-নিরীক্ষার নক্সা বা প্রয়োগকৌশল সৃষ্টি করতে সাহায্য করে। এমন কি উদ্ভিদবিজ্ঞানেও এখন জ্যামিতির প্রভূত প্রয়োগ শুরু হয়েছে। আবার এগুলি জ্যামিতির সমাধানের অনেক নিরুত্তর প্রশ্নও নিয়ে এসেছে।

'প্রাথমিক জ্যামিতির অঙ্কনের সৌন্দর্য ও যুক্তিবিদ্যার শ্রেষ্ঠ নিদর্শন' বইটিকে আটটি অধ্যায়ে ভাগ করা হয়েছে। যদিও অধ্যায়গুলির একটি পারম্পর্য রাখা হয়েছে, কিন্তু যেহেতু বইটি প্রাথমিকভাবে জ্যামিতির পরিচয় যাদের হয়ে গিয়েছে, তাদের জন্য লেখা

হয়েছে, বই পড়ে বুঝতে এ পারম্পর্য রাখা আবশ্যিক নয়। অধ্যায়গুলির বিষয়বস্তু প্রাথমিক স্তরে জ্যামিতিক বস্তুনির্মাণের বা জ্যামিতিক মনোহরণকারী অঙ্কনের জন্য যেমন নেওয়া হয়েছে, তেমনি উচ্চমাধ্যমিক স্তরে জ্যামিতির জ্যামিতি ব্যতীত অন্য বিজ্ঞানে প্রয়োগ দেখানও হয়েছে। আবার মাধ্যমিক স্তরের যে জ্যামিতি পড়ান হয় তার সৃজনাত্মক দিক দেখাবার জন্য কয়েকটি অধ্যায় সংযোগ করা হয়েছে। শিক্ষক-শিক্ষিকাগণের প্রতি এই অনুরোধ রেখে বইটি লেখা হয়েছে যে তাঁরা যেন এই বই পড়ে মূল সুরের উপলব্ধি রেখে ছাত্রদের মান অনুসারে তাদের কাছে বিষয়বস্তুর উপস্থাপনা করেন। গ্রন্থকার হিসাবে লক্ষ্য রেখেছি যাতে এটি করা তাঁদের পক্ষে সম্ভব হয়।

এই বই লিখতে আমাকে আমার দীর্ঘ শিক্ষকজীবনে যেসব ছাত্ররা আমার ঘনিষ্ঠ সান্নিধ্যে এসেছিল ও পরবর্তী যুগে শিক্ষাপ্রশাসনে এসে যাঁদের সশ্রদ্ধ অকুণ্ঠ ভালবাসা পেয়েছি তাঁরা বিশেষ প্রেরণা যুগিয়েছেন। এদের মধ্যে বিশেষভাবে নাম উল্লেখ করতে হয় ডঃ প্রশান্ত কুমার চৌধুরী, ডঃ বৈদ্যনাথ পাত্র, ডঃ মনোরঞ্জন মাইতি, ডঃ বীরেন্দ্রনাথ মণ্ডল, অধ্যাপক দিব্যেন্দু হোতা, স্নেহভাজন পশ্চিমবঙ্গ রাজ্যপুস্তকপর্ষদ কর্মীগণ, প্রাক্তন মুখ্য প্রশাসন আধিকারিক ডঃ লাডলীমোহন রায়চৌধুরী ও বর্তমান মুখ্য প্রশাসন আধিকারিক অধ্যাপক শিবনাথ চট্টোপাধ্যায়ের। এখানে আমার স্ত্রী সুজাতা দাশগুপ্তের উৎসাহ প্রদান আমার স্বভাবসুলভ আলস্য ত্যাগ করে পরিশ্রম করতে উৎসাহী করেছে। যেহেতু বইটির বিষয়বস্তু গণিতভুক্ত, লেখকহিসাবে এর নির্ভুলতায় নিঃসন্দেহ হওয়ার জন্য বিশেষ উদ্বিগ্ন ছিলাম। এ দুশ্চিন্তার নিরসনে সাহায্য করেছেন এ বইএর পাণ্ডুলিপির নিরীক্ষক ডঃ অনাদিশঙ্কর গুপ্ত। তিনি পুঙ্খানুপুঙ্খরূপে পাণ্ডুলিপির ভুলত্রুটি দেখিয়ে দিয়েছেন ও সংশোধনের সুযোগ করে দিয়েছেন। এজন্য আমি তাঁর নিকট বিশেষভাবে ঋণী। এখন বইটি শিক্ষক-শিক্ষিকা ও উপযুক্ত মানের ছাত্রছাত্রীর মধ্যে সাদরে গৃহীত হলে বাধিত হব।

1লা জানুয়ারী, 1989

এ.ডি. 258 সল্টলেক, সেক্টর-1,
কলিকাতা-700064।

সুশীলচন্দ্র দাশগুপ্ত

সূচীপত্র

অবতরণিকা

Ever since Plato's indignation Eudoxus and Archytus, the doctrine that applicability corrupts has been held by many leading mathematicians. There is only one source of corruption in mathematics ; and that is the motivation by anything except curiosity and desire for understanding and harmony.

......*Kac.*

প্রাথমিক জ্যামিতি মাধ্যমিক স্তরে বিদ্যালয়ের ছাত্রদের পাঠ্য বিষয়। উচ্চমাধ্যমিক স্তরের ছাত্রদের ইহা পাঠ্যবহির্ভূত যদিও প্রাথমিক জ্যামিতির অনেক প্রমাণিত ধর্ম বা উপপাদ্য ত্রিকোণমিতিতে ব্যবহার করা হয়ে থাকে। কিন্তু এই মনোমুগ্ধকর বিষয় সমগ্র বিষয়রূপে শিক্ষণীয়, বিশেষরূপে ফলিত ও ন্যায়ের তাৎপর্যের দৃষ্টিকোণ দুটি থেকে। কিন্তু ফলিত দিকটিতে অতিরিক্ত জোর দেওয়া সঠিক হবে না, কারণ তা'হলে একটি বিষয় পড়েই আশুলাভের দিকে দৃষ্ট হবে। ইউক্লিডের সম্বন্ধে একটি গল্প প্রচলিত আছে তাঁর এক অনিচ্ছুক ছাত্রকে নিয়ে। ইউক্লিডকেই সম্ভবত প্রথম পাঠ্য-পুস্তক প্রণেতা বলা যায়। তিনি ত্রয়োদশটি গণিত বিষয়ের গ্রন্থপ্রণেতা, এবং ত্রয়োদশটির মধ্যে দশটিই জ্যামিতি বিষয়ে। উপরোক্ত ছাত্র যখন তার শিক্ষককে জিজ্ঞাসা করে বসে যে তার এই পড়াশুনা করে কি লাভ হবে, তখন শিক্ষক তাঁর দাসকে ছাত্রটিকে কিছু স্বর্ণমুদ্রা দিতে বলেন, কারণ ছাত্রটি পড়াশুনা করে অর্থলাভ করতে চায়। এই বিষয় পাঠে যে সত্য উপলব্ধি হয় তাই নয়, ভাস্কর্যের নীরব গম্ভীর সৌন্দর্য উপভোগ করায়, কিন্তু কখনও চিত্তের দুর্বলতা আনে না। এর স্বর্গীয় বিমল সৌন্দর্য যে কোন কলা-কর্মের নৈপুণ্যের উৎকর্ষতায় উঠতে পারে।

প্রথমেই জিজ্ঞাসা করব বিদ্যালয়স্তরের জ্যামিতির উদ্দেশ্য কি। এর সম্ভাব্য উত্তর তিনটিও সম্ভবতঃ তাদের মিশ্রণ। অবশ্যই ছাত্রদের ফলিত প্রয়োগের উদ্দেশ্যে কঠিন, ঘন বা সমতলীয় বস্তুর বিভিন্ন পরিমাপগুলি দিতে হবে। আবার বাস্তব উদ্দেশ্য ধরা যায় যে ছাত্রদের যুক্তিসহ চিন্তার শিক্ষাদান করতে হবে। এখানেই প্রকৃতপক্ষে শিক্ষকের নিয়োগের প্রাসঙ্গিকতা এবং ছাত্রদের ব্যুৎপত্তি পরীক্ষায় সাফল্যের মাপকাঠি। ইহা অন্য যে কোন বিষয়েও খাটে। অবশেষে বিশুদ্ধ উদ্দেশ্য এই যে ছাত্রেরা যেন জ্যামিতিক সত্য উপলব্ধিতে উৎসাহ পায় এবং জ্যামিতিক চিন্তাবিষয়ে ধারা ধরতে পারায় উৎসাহী হয়। প্রথম উদ্দেশ্যটি জ্যামিতির প্রধান অংশ নহে। আবার

যুক্তিবাদী করতে জ্যামিতির ক্ষমতা সন্দেহাতীত নহে। তৃতীয় উদ্দেশ্য বিষয়ে অত্যন্ত সতর্কতা সহকারে অগ্রসর হওয়া উচিত। জ্যামিতির বিভিন্ন দিক যেভাবে ঐতিহাসিক দৃষ্টিকোণ থেকে এসেছে সেদিক হতে ধীরে ধীরে শেখাতে হবে যাতে সত্যিকার বিষয়গুলিতে ছাত্রেরা আনন্দ পেতে পারে। পরীক্ষায় সাফল্যের জন্যই একমাত্র কাজ করা শিক্ষক ও শিক্ষার্থীর উভয়ের পক্ষে গর্হিত কাজ। কিন্তু বৃত্তিপরীক্ষার্থীদের কতবার এই কথাটাই না শোনানো হয়! জ্যামিতিক গঠনের প্রতি আগ্রহ আনাই হবে যুক্তিসঙ্গত কাজ ও জ্যামিতিক চিন্তাধারার প্রতি আকৃষ্ট করতে পারলেই, জ্যামিতির নতুন নতুন দিগন্ত খুলে যাবে। সুতরাং জ্যামিতির শিক্ষকদের উপর উচ্চতর শ্রেণীগুলিতে ও অপেক্ষাকৃত নিম্নতর শ্রেণীগুলিতেও বৃহত্তর দায়িত্ব বর্তাচ্ছে।

ইউক্লিডের জ্যামিতির প্রণালী অবশ্যই পরিণত মস্তিষ্কের দান এবং পৃথিবীর ইতিহাসের সন্ধিক্ষণে সবচেয়ে প্রতিভাবান গণিতজ্ঞের সৃষ্টি। ইহা দীর্ঘকালের মানসিক যুদ্ধের পরিণতি যার ফলে বস্তুর আকারের আকৃতি যা চোখে দেখা যায় এবং যা যুক্তির সাহায্যে বা শুদ্ধ স্বতঃসিদ্ধের সাহায্যে পাওয়া যায় তাদের পার্থক্য ধীরে ধীরে এসে পড়ে।

ইউক্লিডের যে জ্যামিতি বিদ্যালয়ে পড়ান হয় তা জ্যামিতিক বিষয়বস্তুর প্রতি প্রকৃত উৎসাহ সৃষ্টি করার বিরোধী; কারণ যে স্বতঃসিদ্ধগুলি দ্বারা জ্যামিতির সূত্রপাত হয় তাদের সহিত যে উদাহরণগুলি দেওয়া হয় তাদের যোগসূত্র পরিষ্কাররূপে বোধগম্য নয়। ছাত্রদের প্রথমে আকার, সদৃশ বস্তুর আকার ও প্রতিসাম্য বিষয়ের পরিচিতি দিতে হবে। প্রধান লক্ষ্য হওয়া উচিত যেন ছাত্রেরা জানবার জন্য আনন্দ পায় এবং যেন সব উপপাদ্যে আশ্চর্যভাবে বিন্দুগুলির, রেখাগুলির, তলগুলির বা চিত্রগুলির, সমাপতনের প্রতি দৃষ্টি আকৃষ্ট হয়। তাদের সমস্ত ত্রিভুজের বাহুগুলির উপর লম্বগুলির একটি বিন্দুতে সমাপতন দেখে খুসী হওয়া উচিত বা যে কোন সম্পূর্ণ চতুষ্কোণের কর্ণগুলির মধ্যবিন্দুগুলির একটি সরলরেখায় অবস্থিত দেখেও আনন্দ পাওয়া উচিত। তেমনি ঘনবস্তুর ক্ষেত্রে লম্ব চতুস্তলকের লম্ববিন্দু দেখে ও অনুরূপ অনেক জ্যামিতিক ধর্ম দেখে রোমাঞ্চিত হওয়া দরকার। ছাত্রদের এইগুলি ছবি এঁকে বা মডেল তৈরী করে পাওয়া বাঞ্ছনীয়। সূত্র সাহায্যে প্রমাণ পরে শুরু হওয়া উচিত হবে।

যখন একবার কোন বালকের কাছে ধরা পড়বে যে দুটি সরলরেখা একটি বিন্দুতে ছেদবিন্দুর কাজ করছে এবং অনুরূপ ধর্ম তলের ক্ষেত্রে বা বৃত্তের ক্ষেত্রেও পাওয়া যাচ্ছে, তখন তার কাছে তীরভূমি আর জঙ্গলাকীর্ণ না থেকে পরিষ্কার হ'য়ে যাবে এবং

অনেক ধর্ম তার নিকট সরল হয়ে যাবে। যে বালক সঠিকভাবে শিক্ষা গ্রহণ করেছে তার কাছে সত্যিই আনন্দের হবে সবকিছু। যখন একগুচ্ছ ধর্ম তার কাছে পরিচিত হবে, তখন ইউক্লিডের প্রণালীর সূত্রগুলি তার কাছে কত সংক্ষিপ্ত হয়ে যাবে—যেগুলি দিয়েই সম্পূর্ণ ইউক্লিডের জ্যামিতি গড়ে তোলা যায়। সত্যি বলতে কি এই মূল-সূত্রগুলির সংখ্যা মাত্র দুটি—(1) সমাপতনের প্রতিজ্ঞাগুলি, (2) প্যাপ্পাসের প্রতিজ্ঞা—দুইটি রেখার উপর যে কোন তিনটি করে বিন্দু নিয়ে তাদের বজ্রযোগের ফলে যে তিনটি ছেদ বিন্দুর সৃষ্টি হয় তারা সমরেখীয়। একটি আনুষ্ঠানিকভাবে প্যাপ্পাসের প্রতিজ্ঞার প্রমাণ সাধারণতঃ ব্যবহৃত স্বতঃসিদ্ধগুলির সাহায্যে বা স্থানাঙ্ক বা ভেক্টরের সাহায্যে পরে স্থানবিশেষে দেওয়া হবে। এখন নিশ্চয়ই পরিষ্কার হয়েছে যে জ্যামিতি বিষয়টিকে জীবন্ত করে তুলতে হলে সহানুভূতিশীল ও উদ্যমশীল এবং সময় ব্যয়ে ইচ্ছুক শিক্ষক দরকার। এরূপ শিক্ষকগণ যাদের নিকট প্রাথমিক শুদ্ধ জ্যামিতি একটি বন্ধ্যা বিষয় তাদের কৃতজ্ঞতা অর্জন করতে পারবেন। তখন তাদের নিকট জ্যামিতি হয়ে উঠবে একটি সরস বিষয়, কেবলমাত্র প্রধানতঃ মুখস্থের বিষয় না থেকে। এইসব শিক্ষকগণ আরও একটি গুরু কর্তব্য করতে পারবেন—দেখাতে পারবেন যে বর্ণনামূলক জ্যামিতি বা স্থানাঙ্ক জ্যামিতি বা অনুরূপ জ্যামিতি সামান্য কয়েকটি সাধারণ নিয়মের সূত্রের অধীন।

উপরের উদ্দেশ্য নিয়ে, শিক্ষককে ব্যবহারের জন্য কিছু বেশী হাতিয়ার হিসাবে কিছু স্থানাঙ্ক জ্যামিতি, কিছু ত্রিকোণমিতি, কিছু ভেক্টর বীজগণিত ও সামান্য কিছু জটিল সংখ্যার বীজগণিতকে সঙ্গে নিতে হবে। তবে আশ্চর্যজনকভাবে কোন সহজ ধর্মের সাধারণীকরণ অতি সহজে পেতে পারবেন। শিক্ষকদের এই সামান্য কিছু বেশী জানবার দরকারটি বিখ্যাত গণিতবিদ জি. পলিয়া (G. Poly'a) ও ই. নোয়েথার (E. Nöether) এর তাদের যৌবনকালের তর্ক থেকে পরিষ্কার হয়ে যাবে। নোয়েথার আধুনিক সূত্রনির্ভর গণিত পছন্দ করতেন না। এবং তা বন্ধুদের নিকট প্রায়ই খোলাখুলিভাবে বলতেন। বন্ধু পলিয়া তার উত্তরে বলেছিলেন যে প্রাচীনপন্থী গণিতবিদেরা বানরের মত যে বানরগুলি গাছ বেয়ে উপরে উঠতে পারে না। উত্তরে শুনতে হল যে আধুনিকপন্থী গণিতবিদেরা এমন বানর যারা গাছে উঠতে পারে, কিন্তু নামতে পারে না। কিন্তু উভয়ে মিলে সম্পূর্ণ গাছটিকে দেখতে পায়, একজন উপরের দিক থেকে নীচে যতদূর দেখা যায়, অপরজন নীচের দিক থেকে যতদূর উপরে দেখা যায়। কিন্তু সত্যিকার সম্পূর্ণ দেখা হয় যদি প্রায়শঃই জ্যামিতি নামক বৃক্ষের নীচের হতে উপরে ও উপর হতে নীচে নামা যেত।

উপরের উদ্দেশ্যগুলি নিয়ে নিম্নলিখিত অধ্যায়গুলির বিষয়বস্তু সংযোজিত হয়েছে, যদিও গণিতের হাতিয়ারের ব্যবহারের ক্রমের দিকে লক্ষ্য রাখা হয়নি ঃ—

(1) সমতলে মোজাইক টালির অলংকরণ ও সমতলীয় বহুভুজের নির্দিষ্টরূপে বিভাজন ঃ বহুতলক ও তাতে রং লাগান।

(2) কোণের নির্দিষ্ট সম অংশে বিভাজন এবং বৃত্তস্থ সুষমবহুভুজ অঙ্কন।

(3) স্টাইনের ও লেমাসের উপপাদ্য, সামান্যীকৃত স্টাইনের-লেমাসের উপপাদ্য।

(4) সমবিন্দু রেখাসকল, অয়েলার রেখার বহু দিক, ছেদবিন্দুগুলির সঞ্চারপথ, বিশেষরূপে গ্রথিত সঞ্চারপথ, মুরের উপপাদ্য ও তাহার সামান্যীকরণ, টলেমির উপপাদ্য।

(5) পাটীগণিতের সংখ্যার সহিত যুক্ত জ্যামিতির চিত্র।

(6) প্রাথমিক জ্যামিতিতে বীজগণিতের বিশেষ প্রয়োগ বা বীজগণিতে জ্যামিতির প্রয়োগ।

(7) ডিয়েনের ঘনকখণ্ড, সুষমবহুতলকের তল, ধার ও শীর্ষের সংখ্যা নিরূপণ, তল ও ধারের নানা জ্যামিতিক সমস্যা।

(8) প্রাথমিক জ্যামিতির ফলিত প্রয়োগ।

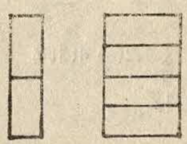
জ্যামিতির কোন ধর্ম নিরূপণ করতে ত্রিকোণমিতি, বীজগণিত ও সামান্য কলনবিদ্যার ব্যবহার করা হয়েছে। উচ্চমাধ্যমিক স্তর অপেক্ষা উর্দ্ধে উঠবার দরকার হবে না। বীজগণিতের মধ্যে অবশ্য জটিল সংখ্যার প্রয়োগ সুবিধার জন্য কিছু জায়গায় ব্যবহৃত হয়েছে। অবশ্য সব সময়ই নজর রাখা হয়েছে যেন বিদ্যালয়ের সর্বোচ্চ স্তরে জ্যামিতি আকর্ষণীয় বিষয়বস্তু হয়ে থাকে ও জ্যামিতির অন্তর্নিহিত সৌন্দর্য যেন প্রতিভাত হয়। পাঠ্যক্রম নির্দিষ্ট করার পরিবর্তে প্রতিভাবান ছাত্রদের মেধা শাণিত করাই উদ্দেশ্য রাখা হয়েছে। তবেই প্রতিভাবান ছাত্রেরা সৃষ্টির আনন্দে মেতে উঠতে পারবে।

গ্রন্থপঞ্জীতে ম্যাথমেটিক্যাল গেজেট [1] ও অ্যামেরিক্যান ম্যাথমেটিকাল মান্থ্‌লি [2] রূপে চিহ্নিত হয়েছে। পুনঃ পুনঃ নাম দুইটির লেখা এড়িয়ে যাওয়া হয়েছে।

প্রাথমিক জ্যামিতির অঙ্কনের সৌন্দর্য ও যুক্তিবিদ্যার
শ্রেষ্ঠ নিদর্শন

সমতলে মোজাইকটালির অলঙ্করণ ও সমতলীয় বহুভুজের নির্দিষ্টরূপে বিভাজন : বহুতলক ও তাতে রং লাগান।

আমরা প্রথমে দালান তৈরী করবার ইট দিয়ে দেওয়াল গাঁথবার সমস্যা নিয়ে শুরু করি। এখনকার ইটের আকার দৈর্ঘ্যে দুই একক এবং প্রস্থের যে কোন দিকে এক একক। প্রশ্ন যে কত রকমে 4 একক উঁচু দেওয়াল গড়া যেতে পারে। প্রথমেই মনে হবে 1.1(a) নং ছবির রূপ। দুইটি বা চারটি ইট ঘনবস্তুর ব্লক হিসাবে কাজ করবে।



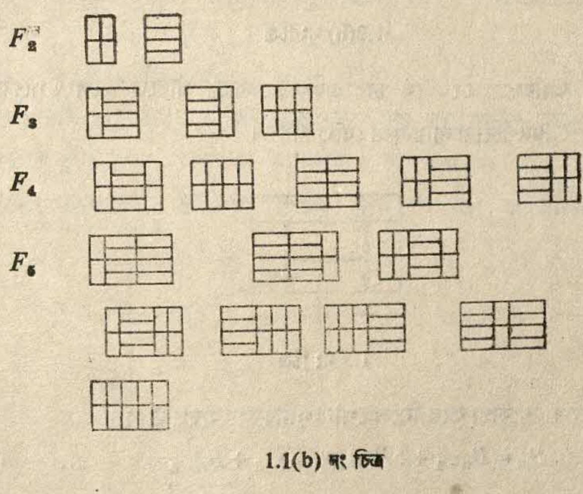
1.1(a) নং চিত্র

আমরা ইচ্ছা করলে একেবারে 1 এককভাবে বা 2 এককে দেওয়ালটি গাঁথতে পারি। যদি দেওয়ালটি n একক নির্মিত হয়ে থাকে এবং যদি F_n একক সংখ্যকরূপে দেওয়াল 1.1(a) ছবির ব্লকগুলি দিয়ে তৈরী হয় তবে

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ n \geqslant 2, \qquad \ldots \qquad (1.1)$$

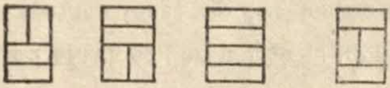
কারণ F_n পেতে F_{n-1} এর সহিত এক একক ইটের গাঁথনী করতে হবে বা F_{n-2} এর সহিত এক ইটের লম্বা দিকের গাঁথনী লাগবে।

$F_1 = 1,\ F_2 = 2,\ F_3 = 3,\ F_4 = 5,\ F_5 = 8, \cdots$ইত্যাদি। নীচে গাঁথনীগুলি চিত্র নং 1.1(b) তে F_2, F_3, F_4, F_5 দেওয়া হল



1.1(b) নং চিত্র

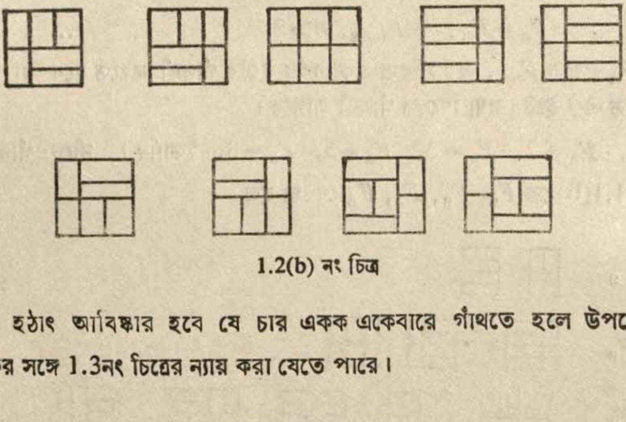
এর পরে আমরা একেবারে 1.1(a) চিত্রের একক গাঁথনীর সঙ্গে 2 একক নিম্নরূপ গাঁথনী ব্যবহার করব (1.2(a) চিত্র)। তবে পৌনঃপুনিকতার সম্বন্ধ হবে



1.2(a) নং চিত্র

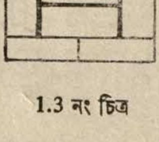
$$Z_n = Z_{n-1} + 4Z_{n-2} \qquad \cdots \qquad (1.2)$$

কারণ হবে পূর্বে উল্লিখিতের ন্যায়। এর সাধারণ সমাধান না খুঁজে একে একে Z_1, Z_2,···ইত্যাদির মান নির্ণয় করব। $Z_1 = 1$, $Z_2 = 5$, $Z_3 = 9$, $Z_4 = 29$···। 1.2(b) নং চিত্রে Z_3 এর বিবরণ দেওয়া হল।



1.2(b) নং চিত্র

কিন্তু হঠাৎ আবিষ্কার হবে যে চার একক একেবারে গাঁথতে হলে উপরের এক এককের সঙ্গে 1.3নং চিত্রের ন্যায় করা যেতে পারে।



1.3 নং চিত্র

এরূপ গাঁথনীও গ্রহণযোগ্য করে নিলে পৌনঃপুনিকতার সম্বন্ধ দাঁড়াবে

$$B_n = B_{n-1} + 5B_{n-2} + B_{n-3} + B_{n-4} \qquad \cdots \qquad (1.3)$$

কারণ 1 একক একভাবে, 2 একক পাঁচভাবে, 3 একক যোগ করতে হলে 2 এককের পরে 1 একক যোগ করতে হবে, 4 একক যোগ করতে হলে উপরোক্ত পাঁচ প্রকার

: এককের দুবার গাঁথনী হলে মাত্র 1.3 নং চিত্রের গাঁথনীর বিকল্প থাকে। পূর্বের ায় সাধারণ সমাধান না খুঁজে একে একে B_1, B_2,…ইত্যাদির মান লিখব। $B_1=1$, $B_2=5$, $B_3=9$, $B_4=30$, $B_5=81\cdots$। আরও পূর্ণ বিবরণ পেতে লে রাইমার [1] দেখা যেতে পারে।

উপরে আয়তক্ষেত্রাকার অংশ দিয়ে দেওয়াল তৈরীর বিবরণ দেওয়া হল। এখন ায়তক্ষেত্র বা বর্গক্ষেত্রকে ভিন্নরূপে বিভাজন আলোচনা করব। আমরা প্রথমে পূর্বে ালোচিত শ্রেণী পুনরায় নিলাম। ইহার পৌনঃপুনিকতার সম্বন্ধ $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$ বং ইহাকে ফিবোনাচ্চি শ্রেণী বলা হয়। $F_1=1$, $F_2=1$, $F_3=2$, $F_4=3$ ত্যাদি। সুতরাং ফিবোনাচ্চি পরম্পরা শ্রেণী দাঁড়ায় 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,…। বোনাচ্চি শ্রেণী সংখ্যার ধর্ম বৈশিষ্ট্য

$$F_{n+1}{}^2-F_nF_{n+1}-F_n{}^2=(-1)^n \quad \ldots \quad (1.4)$$

াহরণরূপে দেওয়া যেতে পারে $3^2-3.2-2^2=(-1)^3$,

$$5^2-3.5-3^2=+1=(-1)^4,$$

$$8^2-5.8-5^2=-1=(-1)^5 \text{ ইত্যাদি।}$$

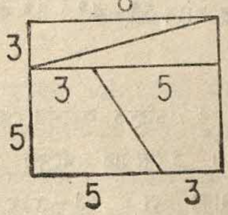
র নিলাম $F_{n+1}{}^2-F_{n+1}F_n-F_n{}^2=(-1)^n$। যেহেতু $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$ পরোক্ত সম্বন্ধকে লেখা যেতে পারে

$$F_{n+1}{}^2-F_{n+1}(F_{n+2}-F_{n+1})-(F_{n+2}-F_{n+1})^2=(-1)^n$$

অথবা, $-F_{n+2}{}^2+F_{n+1}{}^2+F_{n+1}+F_{n+2}=(-1)^n$

অর্থাৎ $F_{n+2}{}^2-F_{n+2}F_{n+1}F_{n+1}{}^2=(-1)^{n+1}$

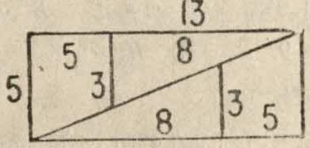
খন প্রথমে বর্গের একটি বাহুকে 3 : 5 অনুপাতে ভাগ করা হল, অর্থাৎ বাহুর র্ঘ্য 8 এরূপ বর্গক্ষেত্রকে দুইটি 3 : 5 অনুপাতে আয়তক্ষেত্রে ভাগ করা হল (1.4 নং ত্র দ্রষ্টব্য)। পুনরায় আয়তক্ষেত্রকে দুইটি ট্রাপিজিয়ামে ভাগ করা হল সমান্তরাল



1.4 নং চিত্র

খাগুলিকে 3 : 5 অনুপাত রেখে। তবে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল 12, ট্রাপিজিয়ামের

ক্ষেত্রফল 20। পুনরায় 5×13 আয়তক্ষেত্রকে কর্ণ যোগ করে ত্রিভুজ দুটি পা (1.5 নং চিত্র)। বৃহত্তর বাহুকে 5 : 8 অনুপাতে ভাগ করি। তবে বিভাজ



1.5 নং চিত্র

রেখাগুলির দৈর্ঘ্য 3 হবে, যেহেতু $\frac{x \cdot 8}{x^2} = \frac{5.13}{5^2}$ বা, $x = \frac{40}{13} = 3\frac{1}{3} \sim 3$ এ ইহাও একটি ফিবোনাচ্চি সংখ্যা। উপরোক্ত ফলপ্রাপ্তির কারণ

$$\frac{F_n F_{n+2}}{x F_{n+1}} = \frac{F_n^2}{x^2} \text{ বা, } x = \frac{F_n F_{n+1}}{F_{n+2}} \text{। যেহেতু}$$

পুনরায়, $F_n F_{n+1} = F_{n+1}^2 - F_n^2 - (-1)^n$। সুতরাং

$$x = \frac{(F_{n+1}^2 - F_n^2) - (-1)^n}{F_{n+2}} = \frac{(F_{n+1} + F_n)(F_{n+1} - F_n) - (-1)^n}{F_{n+2}}$$

$$= \frac{F_{n+2} F_{n-1} - (1)^n}{F_{n+2}} = F_{n-1} - \frac{(-1)^n}{F_{n+2}} \simeq F_{n-1} \text{।}$$

1.4 নং চিত্রের ক্ষেত্রেও একইরূপে দেখান যায় যে ট্রাপিজিয়ামের ক্ষেত্রফল

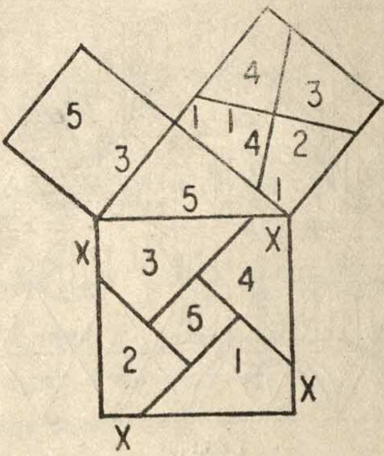
$$\tfrac{1}{2}(F_n + F_{n-1})\ F_n = \tfrac{1}{2}\ F_n\ F_{n+1} \qquad \ldots \qquad (1.6$$

অনুরূপে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $\frac{1}{2} F_{n-1} F_{n+1}$। কাজেই ট্রাপিজিয়াম ও ত্রিভুজে ক্ষেত্রফলের অনুপাত $F_n : F_{n-1}$। আরও বিশেদ আলোচনার জন্য এগার [2 কোক্সিটার [3], কাণ্ডি ও রোলেট [4], লকউড ও ম্যাকমিলান [5], দেখা যে পারে।

ত্রিভাজনের ভিন্নরূপ প্রদর্শনের জন্য পিথাগোরাসের উপপাদ্যের সাহায্য নেও যেতে পারে। লক্ষ্য করা যেতে পারে $5^2 = 4^2 + 3^2$ বা $5.5 = 4.4 + 3.3$ (1.6 চিত্র দ্রষ্টব্য)।

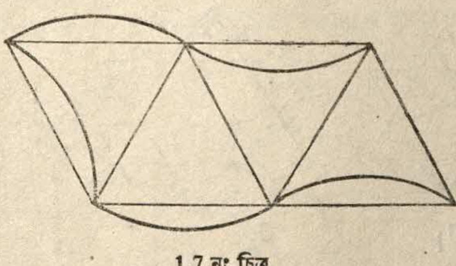
4 দৈর্ঘ্যের বর্গক্ষেত্রের 1, 2, 3, 4 চিহ্নিত অংশের ক্ষেত্রফল প্রত্যেকেই 4 মানে কারণ সবগুলি অঞ্চলই একরূপ। 5 দৈর্ঘ্যের বর্গক্ষেত্র $x : (5-x)$ অনুপাতে ভ করে বৃত্তস্থ চারটি চতুর্ভুজ আঁকা হল। $(5-x)x = 4$ ধরে নিলে, $x = 4,$ 1 5 দৈর্ঘ্যের বর্গক্ষেত্রের অন্তঃস্থ বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 3^2। কাজেই 5^2, 4^2 সুন

প্রতিসাম্য নিয়ে বিভাজন করা যেতে পারে। কিন্তু 3^2 কে সেরূপ করা যায় না। এরূপ চিত্র আঁকা ছাত্রদের নিকট খুবই আনন্দপ্রদ। নীচে খুবই সুন্দর, কিন্তু খুবই সহজ ছবি



1.6 নং চিত্র

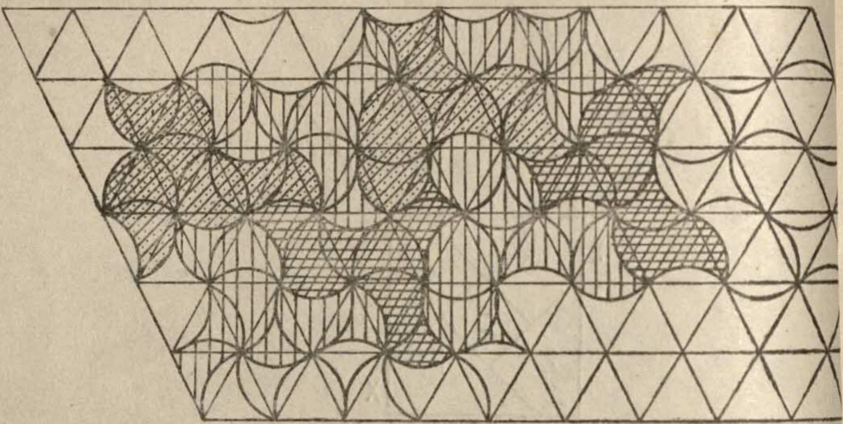
সমবাহু ত্রিভুজে বা রম্বসে বৃত্তের চাপের প্রতিফলনের সাহায্য দেয়া হল ; **বিশেষতঃ** 1.7 নং চিত্র দ্রষ্টব্য। 1.8 নং চিত্র দেখাচ্ছে কিরূপ সুন্দর প্রতিসম চিত্র রম্বসের



1.7 নং চিত্র

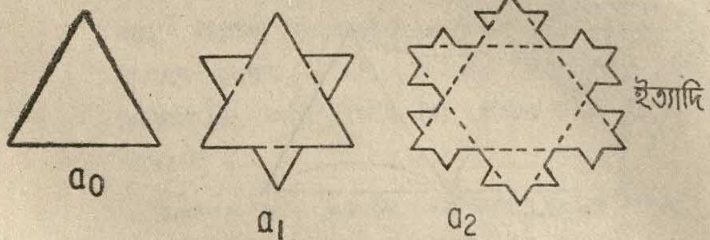
উপর ভিত্তি করে করা যায় মনোরম টালি তৈরী করবার জন্য। যা তৈরী করবার গঠনশৈলী ঠিকমতন অনুধাবন করতে পারি তবে নিশ্চয়ই আরও অনেক প্রকার সুন্দর প্রতিসম টালি তৈরী করা সম্ভব হবে। ছাত্রেরা যাতে নানা প্রকার গঠনের জ্যামিতিক প্রকৃতি বিষয়ে কৌতুহলী হয়ে ওঠে সেজন্য আরও বিশদ আলোচনা করব। ভন্ কক্ এর তুষার কণিকার চিত্র অনেকেরই পরিচিত থাকতে পারে। এরূপ বিষয়ের সুন্দর বিবরণ পাওয়া যেতে পারে কাণ্ডি [4] দেখলে। সামান্য বিবরণ দিতে হলে শুরুতে

একটি সমবাহু ত্রিভুজ নিলাম। একটু বড় আকারের ত্রিভুজ নিলে আঁকতে সুবিধা হবে। প্রত্যেক বাহুকে সমান তিন অংশে বিভক্ত করা হল, মধ্যের অংশগুলির উপর সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কন করলাম। পুনরায় ছোট সমবাহু ত্রিভুজের দুইটি বাহু সমান তিন



1.8 নং চিত্র

অংশে বিভক্ত করে মধ্যের অংশগুলির উপর পূর্বের অনুরূপ সমবাহু ত্রিভুজ আঁকলাম। পদ্ধতিটির পুনরাবৃত্তি করলে $a_0, a_1, \cdots a_n$ ক্ষেত্রফল পাওয়া গেল। 1.9 নং চিত্রে $a_0, a_1, \cdots a_n$ এর স্বরূপ দেখান হল।



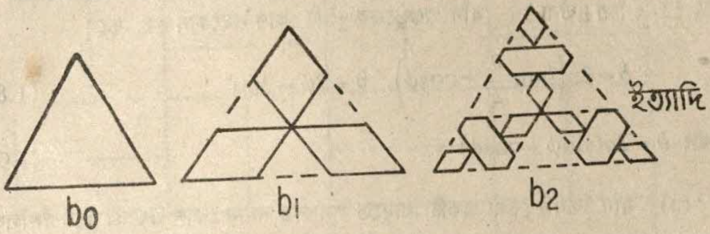
1.9 নং চিত্র

ক্ষেত্রফল নিরূপণ করলে

$$a_0 = \Delta, \quad a_1 = a_0 + \frac{\Delta}{3^2}, \quad a_2 = a_1 + \frac{\Delta}{3^8}\frac{l_1}{a}, \qquad \cdots \qquad (1.7)$$

$a_n = a_{n-1} + \frac{1}{3}\frac{l_{n-1}}{a}\frac{\Delta}{3^n}$, $l_n = 3a\left(\frac{4}{3}\right)^n$ অর্থাৎ l_n, a_n চিত্রের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য, $a = a_0$ ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য।

ছোট ত্রিভুজগুলি বাহিরের দিকে না এঁকে যদি ভিতরের দিকে আঁকতাম তাহলে ভন্ কক্‌এর তুষার কণিকাচিত্র 1.10 নং চিত্রের ন্যায় হবে। ধরলাম তাদের ক্ষেত্রফলের শ্রেণী $b_0, b_1, b_2, \cdots b_n$ ।

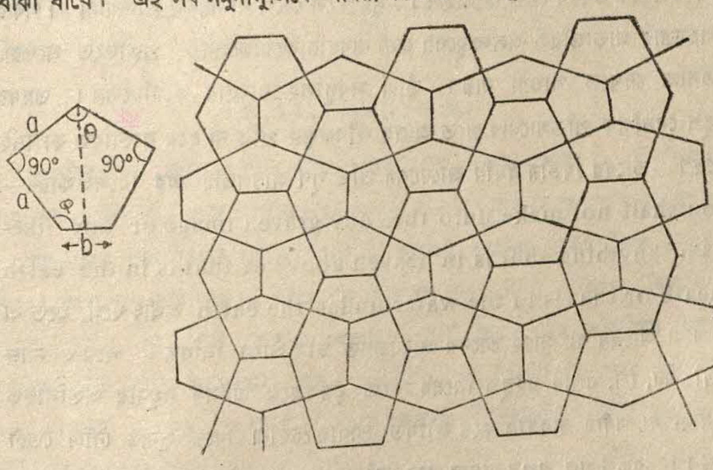


1.9 নং চিত্র

$b_n = b_{n-1} - \frac{1}{3}\,\frac{l'_{n-1}}{a} \cdot \frac{\Delta}{3_n}$, l'_{n-1}, b_{n-1}-এর যে কোন বাহুর দৈর্ঘ্য, $a =$ b_0-ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য।

হঠাৎ চিত্রগুলি আঁকা কঠিন মনে হতে পারে। কিন্তু সামান্য মনঃসংযোগ করলে চিত্রগুলি আঁকা মোটেই কঠিন হবে না।

সমতল মেঝেতে অলঙ্করণ টালির নমুনা সম্বন্ধে আরও অনেক বলবার আছে। প্রাচীন কায়রো সহরে ষড়ভুজের ভিতরে পঞ্চভুজ আঁকা অনেক টালি আছে। তারা একটা বৈশিষ্ট্যপূর্ণ প্রতিসাম্য নিয়ে আছে। কিরূপে ও কেন এরূপ প্রতিসাম্য বেছে নেওয়া হয়েছে টালির নমুনা করতে নীচের সামান্য ত্রিকোণমিতির বিশ্লেষণ দেখলেই বোঝা যাবে। এই সব নমুনাগুলিকে আমরা কায়রোর পঞ্চভুজ টালি বলব।



1.11 নং চিত্র

ধরে নেওয়া যাক পঞ্চভুজের চারটি বাহুর সমান মান a এবং অপর বাহুর মান b (1.11নং চিত্র দ্রষ্টব্য)। যদি পঞ্চভুজের দুইটি কোণ সমকোণ হয়, তবে

$$b = 2a\left((\sin\frac{\theta}{2} + \cos\phi\right), \quad \theta + 2\phi = 360^\circ \quad \ldots \quad (1.8)$$

অর্থাৎ $b = 2a(\sin\phi + \cos\phi)$ ... (1.9)

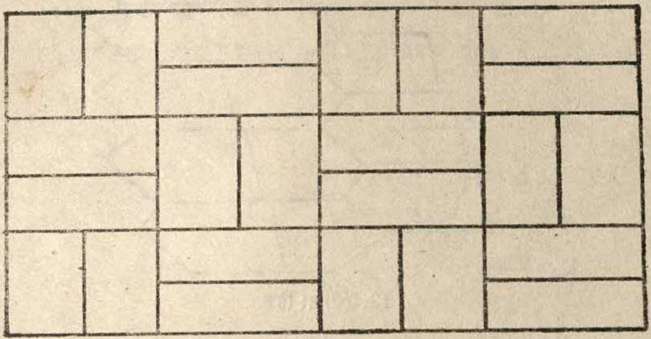
(a) যদি তিনটি রেখা একটি বিন্দুতে পরস্পর সমান কোণ উৎপন্ন করে মিলিত হয়, আমরা ধরতে পারি $\theta = \phi = 120^\circ$। এইরূপ ধারণায় $b = a(\sqrt{3} - 1)$ এবং ইহাই b এর সবচেয়ে এবং ছোটমান এবং আমাদের পছন্দমত।

(b) যদি $b = a$ হয় $\phi = 114^\circ 18'$ হবে, যেহেতু $\phi + 45^\circ$

$$= 180^\circ - \sin^{-1}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \quad \ldots \quad (1.10)$$

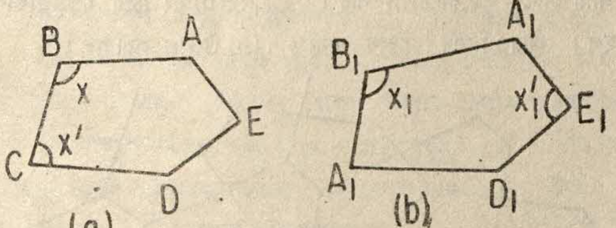
(c) যদি $b = 2a$ ধরা যায়, $\phi = 90^\circ$ হবে ও আমরা আয়তক্ষেত্রাকার ছবি পাব। উপরের 1.11 নং চিত্র (a) এর ধারণা অনুসারে আঁকা। ইহাতে ষড়ভুজের ভিতরে চারটি পঞ্চভুজ আঁকা আছে। কায়রো সহরের বড় বড় মেঝেতে ইহারা সবচেয়ে বেশী আঁকা আছে। বাস্তবে মেঝেতে টালির ছবিগুলির আকৃতি ত্রয়োদশ শতাব্দীতে স্পেন দেশে সবচেয়ে উৎকর্ষ লাভ করেছিল। মুররা সে দেশে নানারকম প্রতিসাম্য বা পর্যায় আলহাম্ব্রার আভ্যন্তরিক অলঙ্করণের জন্য ব্যবহার করেছিলেন। প্রকৃতিতে সতেরটি প্রতিসাম্য দেখতে পাওয়া যায়। তাঁরা সবগুলিই ব্যবহার করেছিলেন। তাদের এইরূপ নৈসর্গিক প্রতিসাম্যের প্রতি আগ্রহ জীবজন্তুর প্রতি না হয়ে স্বাভাবিক কারণেই হয়েছে। তাদের দ্বিতীয় ধর্মীয় আদেশের প্রতি পূর্ণ আনুগত্যই এর বিশেষ কারণ—Thou shalt not make unto thee any graven image or any likeness of anything that is in heaven above or that is in the earth beneath or that is in the water under the earth অর্থাৎ স্বর্গে, মর্তে বা জলে যারা আছেন বা আছে তাদের আকৃতিগত ছবি আঁকা নিষিদ্ধ। পরে ওলন্দাজ শিল্পী এম্‌, সি, এশার এইরূপ নিষেধ হতে মুক্ত হয়ে এইসব নমুনার অন্তর্নিহিত প্রতিসাম্য বা পর্যায় ব্যবহার করে জীবিত প্রাণীর চেহারা দিয়ে সুন্দর টালি তৈরী করেছেন। একটি মূল অঞ্চল পছন্দ করে তিনি নানারকম ছবি এঁকেছেন। একাধিক ছবি পরে দেওয়া যাবে।

(c)-এর জন্য পরস্পর যুক্ত আয়তক্ষেত্রগুলি পাওয়া যায় (1.12 নং চিত্র দ্রষ্টব্য)



1.12 নং চিত্র

কায়রো সহরের টালীর নমুনার সামান্যীকরণ করা যেতে পারে এবং সেগুলিরও সুন্দর প্রয়োগ করা যেতে পারে। আমরা দুইটি পঞ্চভুজ ABCDE, $A_1B_1C_1D_1E_1$ আঁকলাম (1.12.1(a), (b) চিত্রগুলি দ্রষ্টব্য)। একটি ত্রিভুজের কোণগুলির 180°

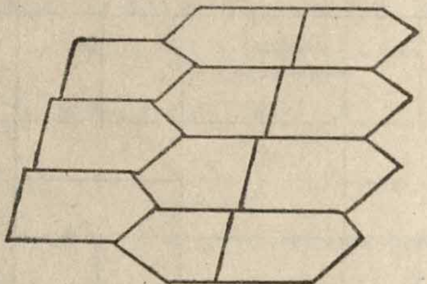


1.12, 1.12.1 (a), (b) নং চিত্র

এবং ত্রিভুজটার টালি দিয়ে সব সময় আমরা মেঝে পূর্ণ করতে পারব। চতুর্ভুজের কোণগুলির সমষ্টি 360° এবং সেজন্য চতুর্ভুজাকার টালী দিয়েও মেঝে পূর্ণ করা যায়। কিন্তু পঞ্চভুজের কোণগুলির সমষ্টি 540°। কাজেই পঞ্চভুজ টালী দিয়ে মেঝে অলঙ্করণ সম্ভব হবে যদি তার দুইটি কোণের যোগফল হয় 180° ও অপর তিনটির যোগফল 360°। যে দুইটি কোণের যোগফল 180° তারা যদি সন্নিহিত হয়, পঞ্চভুজের দুইটি বাহু সমান্তরাল হবে। 1.12.1 (a), (b) চিত্রে ধরে নিলাম $x+x'=180°$, $x_1+x_1'=180°$। প্রথম ক্ষেত্রে টালীর আকৃতি 1.12.2 (a) নং চিত্রে দেখান হল।

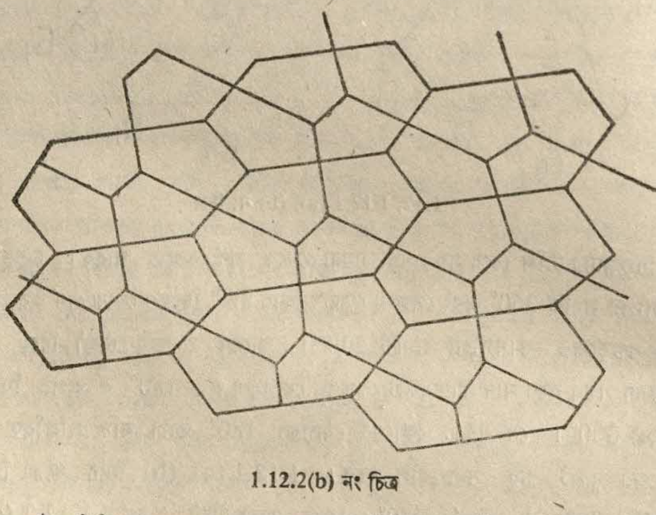
যখন আমরা $x_1+x_1'=180°$ নিলাম, আমাদের আরও একটি বাহুদের মধ্যে সম্বন্ধ

নিতে হবে। যেহেতু, $x_1 + x_1' = 180°$, আমরা অনায়াসেই পঞ্চভুজাকার দুইটি টালির ঐ কোণ-সন্নিহিত বাহু একই রেখাতে সাজাতে পারি। কাজেই যদি একটি



1.12.2(a) নং চিত্র

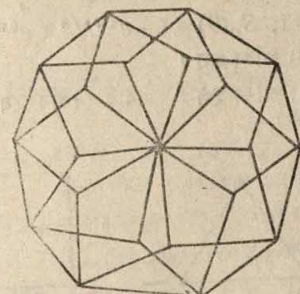
টালির A_1E_1 বাহু, আর একটি টালির B_1C_1 বাহুর সহিত সমরেখ হয়, $A_1E_1 = B_1C_1$ ধরে নিলে সুবিধা হবে। আরও ধরে নিলাম $A_1B_1 = E_1D_1$। এই সর্তগুলি পঞ্চভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্যগুলিকে সীমিত করে। এই প্রকার টালীগুলিও যুক্ত হয়ে ষড়ভুজ সৃষ্টি করে। যখন বিশেষ ক্ষেত্রে $x_1 = x_1' = 90°$ হয় তখন আমরা আগের ন্যায় কায়রো সহরের টালি পাই। 1.12.2(b) নং চিত্রে ষড়ভুজাকার টালি দেখান হল। আরও বিশদ বিবরণের জন্য ডান [6] উল্লেখ করা হল।



1.12.2(b) নং চিত্র

মোজাইক টালির অলঙ্করণকে আমরা পৃথক টালির আকৃতি না মনে করে এক বিশেষ মনোমুগ্ধকর জ্যামিতিক নমুনা মনে করতে পারি। সৌন্দর্যের জন্য গ্রুপ

চরিত্র থাকা দরকার। গ্রুপ চরিত্র পর্যায়ের নামান্তর। পর্যায় ঘূর্ণণ হতেও পাওয়া যেতে পারে বা সরণ হতেও পাওয়া যেতে পারে, উভয় প্রকার হতেও আসতে পারে। ঘূর্ণনের জন্য আমরা একটি সমবাহু পঞ্চভুজ নিয়ে প্রত্যেক ধাপে 72° কোণ ঘুরিয়ে নিলে 360° পরে সুন্দর প্রতিসম ছবি পাওয়া যাবে। 1.13 নং চিত্রে ছবিটি দেখান হল।



1.13 নং চিত্র

1.13 নং চিত্রকে মনে হবে যেন ছাড়া ছাড়া ভাবে আঁকা হয়েছে। কিন্তু একটানা ভাবেও এরূপ চিত্র আঁকা যেতে পারে। 1.13 নং চিত্রই শুধু নহে, অনুরূপ অনেক চিত্র একই সূত্র অনুসারে আনতে পারে। বিশদভাবে পেতে হলে লেমার এবং লেমার [7] উল্লেখ করা হল। যথাসম্ভব সংক্ষিপ্ত আকারে চিত্রগুলি পাওয়ার উপায় বর্ণনা করব।

যদি কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) হয় এবং $x^2+y^2=1$ হয়, এবং (x, y) বিন্দুকে মূলবিন্দুর সহিত যোগ করলে x-অক্ষরেখার সঙ্গে θ কোণ উৎপন্ন করে, $x=\cos\theta$, $y=\sin\theta$। উভয়কে একত্র করে লেখা যায় $z=x+iy=e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ $(i=\sqrt{-1})$। এখন ধরি $\zeta=\exp\left(\frac{2\pi i}{k}\right)=\cos\left(\frac{2\pi}{k}\right)+i\ \sin\left(\frac{2\pi}{k}\right)$ (1.11)

k একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা। n পূর্ণসংখ্যাকে যদি লেখা যায় $n=d_0+2d_1+2^2d_2+\cdots\cdots$ তবে $15=1+1.2+1.2^2+1.2^3$ অর্থাৎ এক্ষেত্রে $d_0=1$, $d_1=1$, $d_2=1$, $d_3=1$। $b(n)=d_0+d_1+d_2+d_3+\cdots$। 15 এর ক্ষেত্রে $b(15)=1+1+1+1=4$। j, m পূর্ণসংখ্যা হলে

$$S_j(m)=\sum_0^m \zeta^{b(n)+jn} \quad \ldots \quad (1.12)$$

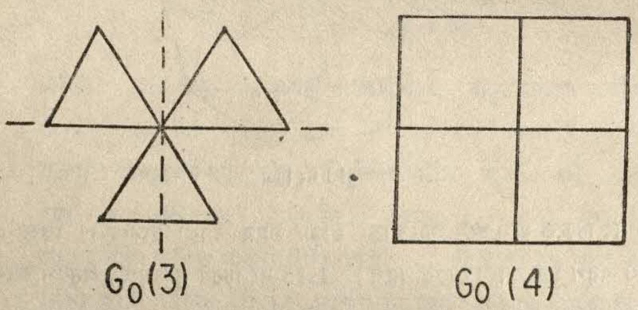
ζ স্থানাঙ্কতলের উপর মূলবিন্দুর সহিত যোজক রেখা। বিভিন্ন ζ যোগ করার উপায় ভেক্টর প্রথায় যোগ করা বা বলবিদ্যায় যেরূপে দুইটি বল যোগ করা হয়। $G_j(k)$

চিত্র পাওয়া যাবে $S_j(0)$, $S_j(1)$, $S_j(2)$,……ইত্যাদির শেষ বিন্দুগুলি যোগ করে। $S_j(m)$ এর পর্যায় না প্রমাণ করেও আঁকার পথেই প্রতিষ্ঠিত হয়ে যাবে। আমরা নীচে $G_j(k)$ এর চিত্র দিলাম, $k<9$। প্রথমেই ধরব $G_0(3)$। এখানে

$$S_0(0)=1,\ \ S_0(1)=1+e^{\frac{2\pi i}{3}};\ \ S_0(2)=0,\ \ S_0(3)=e^{\frac{4\pi i}{3}},$$
$$S_0(4)=e^{4\pi/3}+e^{6\pi i/3},\ S_0(5)=1+e^{2\pi i/3}+e^{4\pi i/3}=0,$$
$$S_0(6)=e^{4\pi i/3},\ \ S_0(7)=e^{4\pi i/3}+e^{8\pi i/3},$$
$$S_0(8)=e^{6\pi i/3}=1,\ S_0(9)=1+e^{4\pi i/3}+e^{8\pi i/3}=0\ \ldots \qquad (1.13)$$

1.14(a) নং চিত্রে $G_0(3)$ আঁকা হল।

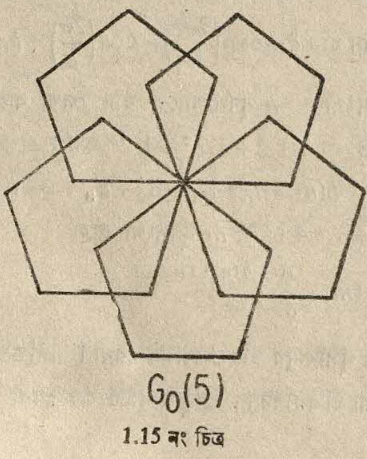
1.14(b) নং চিত্রে $G_0(4)$ আঁকা হল। এবার দেখাব যে 1.13 নং চিত্রের ছবিই $G_0(5)$।



1.14(a) ও 1.14(b) নং চিত্র

$$G_0(5):\ S(0)=1,\ S_0(1)=1+e^{2\pi i/5},\ S_0(2)=1+e^{2\pi i/5}+e^{4\pi i/5},$$
$$S_0(3)=1+\underline{e^{2\pi i/5}}+e^{4\pi i/5}+e^{6\pi i/5},\ S_0(4)=1+e^{2\pi i/5}+e^{4\pi i:5}$$
$$+e^{6\pi i/5}+e^{8\pi i/5}=0$$

$S_0(5)=e^{2\pi i/5}$, ইত্যাদি। … (1.14)



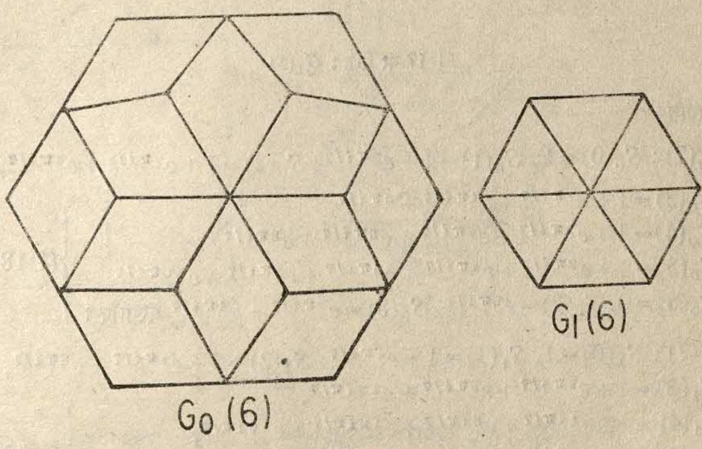
1.15 নং চিত্র

ইহার পর আমরা $G_0(6)$ এবং $G_1(6)$ অঙ্কিত করব।

$$G_0(6) : S_0(0)=1,\ S_0(1)=e^{i\pi/3}+1,\ S_0(2)=1+e^{i\pi/3}+e^{i\pi},$$
$$S_0(3)=1+e^{\pi i/3}+e^{i\pi}+e^{4i\pi/3},\ S_0(4)=1+e^{i\pi/3}+e^{i\pi}+e^{4i\pi/3}+e^{5i\pi/3},$$
$$S_0(5)=0 \text{ ইত্যাদি।} \tag{1.15}$$

$$\left.\begin{aligned} G_1(6) : S_1(0)&=1,\ S_1(1)=e^{2\pi i/3}+1,\ S_1(2)=1+e^{2\pi i/3}+e^{4\pi i/3}=0,\\ S_1(3)&=1+e^{2\pi i/3}+e^{4\pi i/3}+1,\ S_1(4)=2+e^{2\pi i/3}+e^{4\pi i/3}+e^{8i\pi/3}=1+e^{2\pi i/3}\\ S_1(5)&=2+e^{2\pi i/3}+e^{4\pi i/3}+e^{8\pi i/3}+e^{10\pi i/3}=2(1+e^{2\pi i/3}+e^{4\pi i/3})=0,\end{aligned}\right\} \tag{1.16}$$
$$S_1(6)=e^{i\pi/3},\ S_1(7)=e^{i\pi/3}+e^{i\pi}$$

1·16 নং চিত্রে $G_0(6)$ ও $G_1(6)$ চিত্রিত হল।



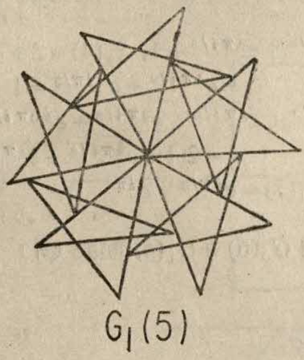
1.16 নং চিত্র

$G_0(6)$ এর চিত্র অত্যন্ত মনোরম, কিন্তু $G_1(6)$ খুবই সরল। ইহাতে মনে হচ্ছে পারে যে $G_1(5)$ এর চিত্র সরল। কিন্তু তাহা নহে। এজন্য $G_1(5)$ এর চিত্র নিম্নে আঁকব।

$G_1(5) : S_1(0)=1,\ S_1(1)=1+e^{4\pi i/5},\ S_1(2)=1+e^{4\pi i/5}+e^{8\pi i/5}$

$$\left.\begin{array}{l} S_1(3)=1+e^{4\pi i/5}+e^{8\pi i/5}+e^{12\pi i/5}, \\ S_1(4)=1+e^{4\pi i/5}+e^{8\pi i/5}+e^{12\pi i/5}+e^{16\pi i/5}=0, \\ S_1(5)=e^{12\pi i/5},\ S_1(6)=e^{12\pi i/5}+e^{16\pi i/5}, \\ S_1(7)=e^{12\pi i/5}+e^{16\pi i/5}+e^{20\pi i/5}, \\ S_1(8)=e^{12\pi i/5}+e^{16\pi i/5}+e^{20\pi i/5}+e^{24\pi i/5}, \\ S_1(9)=0,\ S_1(10)=e^{2\pi i/5} \text{ ইত্যাদি ।} \end{array}\right\} (1{\cdot}17)$$

1·17 নং চিত্রে $G_1(5)$ চিত্রিত হল ।



1·17 নং চিত্র : $G_1(5)$

পুনরায়—

$G_0(7) : S_0(0)=1,\ S_0(1)=1+e^{2\pi i/7},\ S_0(2)=1+e^{2\pi i/7}+e^{4\pi i/7},$

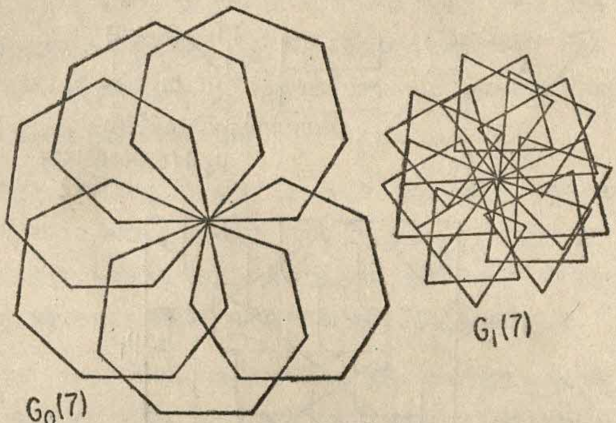
$$\left.\begin{array}{l} S_0(3)=1+e^{2\pi i/7}+e^{4\pi i/7}+{}^{6\pi i/7}, \\ S_0(4)=1+e^{2\pi i/7}+e^{4\pi i/7}+e^{6\pi i/7}+e^{8\pi i/7}, \\ S_0(5)=1+e^{2\pi i/7}+e^{4\pi i/7}+e^{6\pi i/7}+e^{8\pi i/7}+e^{10\pi i/7}, \\ S_0(6)=0,\ S_0(7)=e^{2\pi i/7},\ S_0(8)=e^{2\pi i/7}+e^{4\pi i/7} \text{ ইত্যাদি ।} \end{array}\right\} (1{\cdot}18)$$

$G_1(7) : S_1(0)=1,\ S_1(1)=1+e^{4\pi i/7},\ S_1(2)=1+e^{4\pi i/7}+e^{8\pi i/7},$

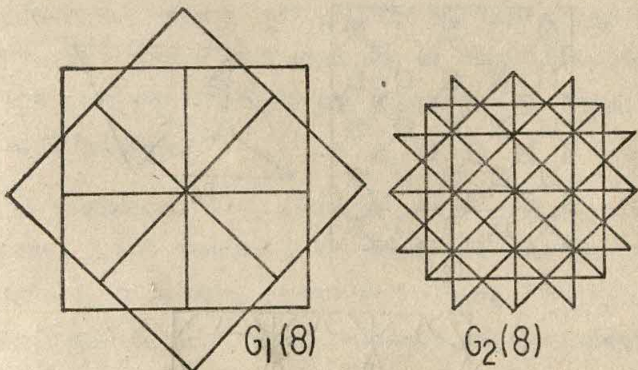
$$\left.\begin{array}{l} S_1(3)=1+e^{4\pi i/7}+e^{8\pi i/7}+e^{12 i\pi/7}, \\ S_1(4)=1+e^{4 i\pi/7}+e^{8 i\pi/7}+e^{12 i\pi/7}+e^{16 i\pi/7}, \\ S_1(5)=1+e^{4\pi i/7}+e^{8\pi i/7}+e^{12 i\pi/7}+e^{16 i\pi/7}+e^{20 i\pi/7}, \\ S_1(6)=0,\ S_1(7)=e^{2\pi i/7},\ S_1(8)=e^{2\pi i/7}+e^{6\pi i/7} \text{ ইত্যাদি ।} \end{array}\right\} (1{\cdot}19)$$

নীচে $G_0(7)$ ও $G_1(7)$ এর চিত্র আঁকলাম । প্রথমে $G_1(7)$ আঁকা খুবই কঠিন মনে হতে পারে ; কিন্তু ভাল করে অনুধাবন করলে মোটেই কঠিন মনে হবে না (1·18 নং চিত্র দ্রষ্টব্য) ।

পূর্বে $G_0(s)$, $G_1(s)$ ইত্যাদি আঁকবার হিসাব বিস্তারিত দেওয়া হয়েছে। উক্ত হিসাবের পুনরুক্তি না করে $G_1(8)$ ও $G_2(8)$ এর রূপ 1.19নং চিত্রে আঁকা হল।

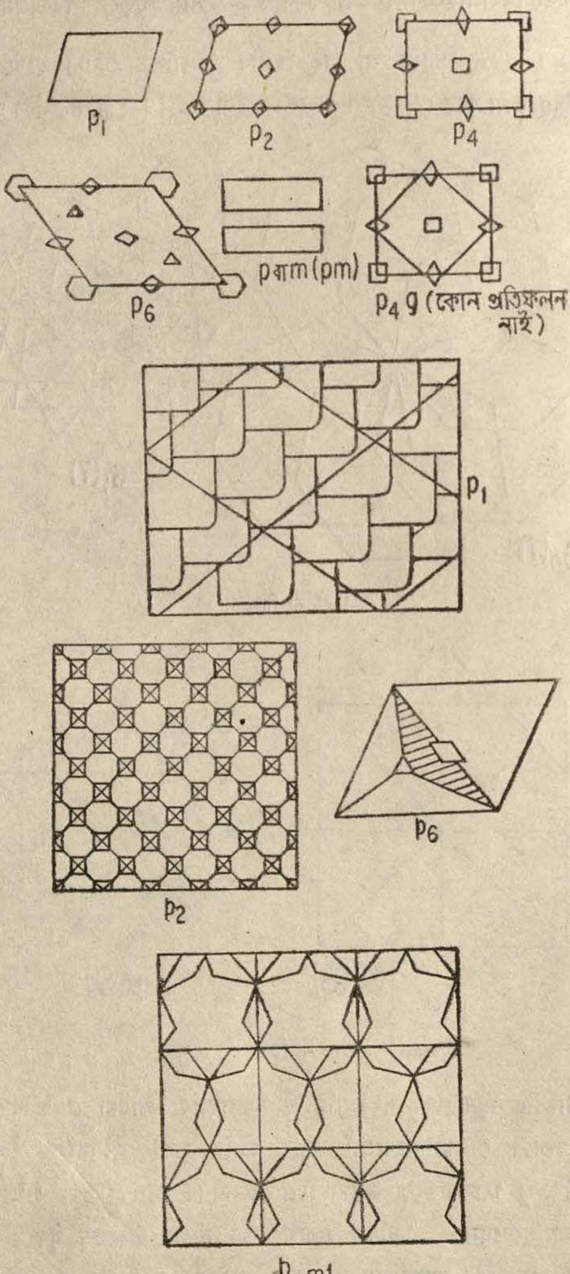


1.18 নং চিত্র



1.19 নং চিত্র

অনেকগুলি টালির নমুনা কিরূপে জ্যামিতির সূত্রসাহায্যে পাওয়া যেতে পারে তার বিবরণ বিশদভাবে দেওয়া হয়েছে। তবে এগুলি সবই অনৈসর্গিক উদাহরণ। প্রকৃতিতে জীবজন্তু বিচরণ করে, তাদের দিয়ে এশার (Escher) প্রথম প্রতিসম চিত্র আঁকতে সক্ষম হয়েছেন। তিনিও প্রথমে কেন সফল হয়েছেন বুঝতে পারেন নাই। কিন্তু পরে তিনি বুঝতে পারেন যে প্রতিফলনে সরন ও প্রতিফলনে ঘূর্ণন দিয়ে যে প্রতিসাম্য পাওয়া যায় তা ব্যবহার করতে পারলে নৈসর্গিক জীবজন্তু দিয়ে



1.20 নং চিত্র

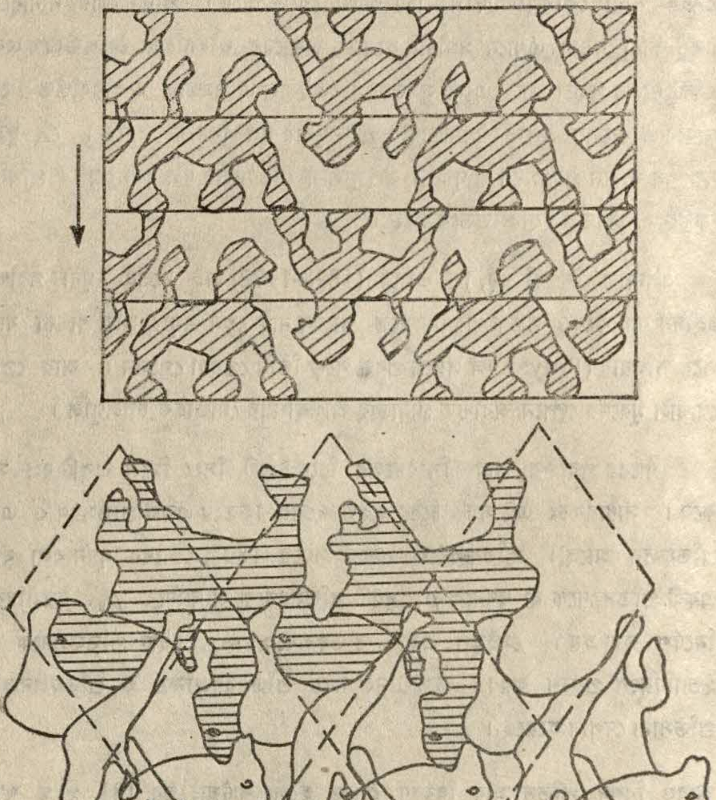
প্রতিসম নানা কৌতুহলোদ্দীপক চিত্র আঁকা যেতে পারে। প্রতিসাম্যের নানারূপের একটু বর্ণনা দেওয়া এখানে সমীচীন হবে। এশারের ছবিগুলির বৈশিষ্ট্য যে একটি একটি দলের সমতা আছে একটি সমতলে। এই দল ঐ সমতলে অপরিবর্তিত থাকে। আবার ঐ দলের অপরিবর্তনীয়তায় দুইটি নমুনার মূল নিদর্শন আছে। সে দুইটি পরস্পর স্বাধীন প্রতিসরণ ও ঘূর্ণন। এইগুলিকে দেওয়ালের দল বলা হয়। প্রাথমিক স্ফটিকের গঠনতত্ত্ব ইহার ভিতরে পড়ে।

ওলন্দাজ শিল্পী এম্, সি, এশার (1898-1972) এই দলের নমুনা পরীক্ষায় বহুদিন ব্যয় করেও সঠিক ধারণা করতে পারেন নাই কেন এরূপ ছবি পাওয়া যায়। পরে পলিয়ার (Polya) দল সম্বন্ধে প্রবন্ধ পড়ে তিনি প্রেরণা পেলেন। আর প্রেরণা যোগাল মুরদের স্পেনে অবস্থিত গ্রানাডার আলহাম্ব্রার মোজাইক টালিগুলি।

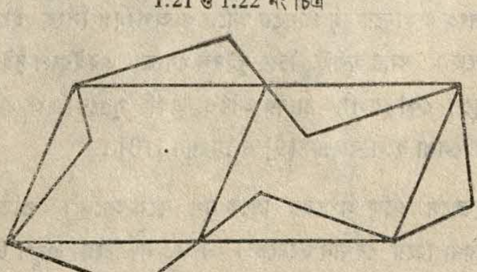
এশারের পরস্পর আবদ্ধ সিংহদলের চিত্রে চারটি সিংহ মিলে একটি দল সৃষ্টি করে। সাধারণতঃ এই সব চিত্রের একটি দলের ভিতরে একটি প্রতিসরণ ও একটি প্রতিফলন আছে। প্রতিফলনকে সময়ে সময়ে 180° কোণের ঘূর্ণন বলা যায়। একটি প্রতিসরণকে বা ঘূর্ণনকে p_1, দুইটি প্রতিসরণকে বা ঘূর্ণনকে p_2...ইত্যাদিরূপে নির্দেশ করা হয়। সেইরূপ একটি প্রতিফলনকে m_1, দুইটি প্রতিফলনকে m_2 ইত্যাদিরূপে প্রকাশ করব। 1·20 নং চিত্রে প্রতিসরণজনিত ও প্রতিফলনজনিত প্রতিসাম্য দেখান হয়েছে।

আরও বিশদ প্রতিসাম্যের বিবরণ পেতে হলে শাট্‌স্নাইডের [8] প্রবন্ধ খুঁটিয়ে পড়তে বলব। উপরের ছবিগুলি ভাল করে অনুধাবন করবার পর এখন এশারের আঁকা পরস্পর সংবদ্ধ সিংহদল ও পরস্পর সংবদ্ধ যোদ্ধাদলের ছবি বুঝতে অসুবিধা হবে না। প্রথমে সহজ ছবি সিংহদলের দেওয়া হবে। এই ছবির বৈশিষ্ট্য হচ্ছে যে একদল সিংহ একদিকে মুখ ফিরে আছে ও অপরদল সিংহ ইহার বিপরীত দিকে মুখ ফিরে আছে। আর একটি চিত্রে দুইদল যোদ্ধা একইরূপে দুই দিকে মুখোমুখি। যারা বিশেষরূপে কৌতুহলী, তাদের আরও একটি পুস্তকের ও একটি প্রবন্ধের নাম উল্লেখের জন্য লেখা হ'ল বাডেন [9] ও নিম্যান [10]।

যোদ্ধাদল দুইভাগে একে অপরের দিকে মুখ করে আছে। প্রতিসাম্যের রেখাগুলি ভাঙ্গা ভাঙ্গা রেখা দিয়ে দেখান হয়েছে। 1·23 নং চিত্রে এরূপ টালি তৈরি করবার নীতি দেখান হল।

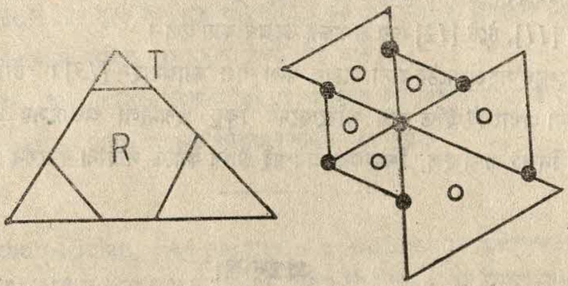


1.21 ও 1.22 নং চিত্র



1.23 নং চিত্র

টালির নমুনার গণিতভিত্তি ও বিবরণ এখানেই আপাততঃ শেষ করলাম। কিন্তু টালির সম্ভাব্য আকার সম্বন্ধে বিশেষ কিছু বলা হয় নাই। এজন্য এই সমস্যা বিষয়ে সামান্য কিছু বলা দরকার মনে করে গণিত কি করে সেখানেও কাজে লাগান যায় দেখান হল। আমরা একটি সমবাহু ত্রিভুজকে কেটে একটা ষড়ভুজ তৈরী করতে পারি বা একটি নির্দিষ্ট ষড়ভুজ এই বাহুর উপর সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কন করে সমবাহু ত্রিভুজ তৈরী করতে পারি (1·24 নং চিত্র দ্রষ্টব্য)। আমরা প্রমাণ করব যে সমবাহু ত্রিভুজ টালি দিয়ে ষড়ভুজের নীচে কোনও সামান্য উত্তল অঞ্চল ঢেকে দেওয়া সম্ভব নহে।



1.24 নং চিত্র

ত্রিভুজ টালি দিয়ে ঢাকতে গেলে তিনটি সম্ভাবনা আছে: (1) ত্রিভুজের একটি শীর্ষ v যে অঞ্চল R ঢাকতে হবে তা একটি শীর্ষ হতে পারে (2) v ছয়টি ত্রিভুজেরই শীর্ষ হতে পারে (3) v তিনটি ত্রিভুজের শীর্ষ হতে পারে। ধরে নিলাম যে ঐ অঞ্চল ঢাকতে n সংখ্যক সমবাহু ত্রিভুজ টালি লাগবে। ধরা যাক যে মিলনবিন্দু, ধার ও তলের সংখ্যা যথাক্রমে V, F, F। যে কোন অঞ্চলে প্রমাণ করা যায় যে $F-E+V=2$। যথা, ত্রিভুজে $F=2$, $E=3$, $V=3$। চতুর্ভুজেও অনুরূপ। লাল ফুটকি দিয়ে তল ও সবুজ ফুটকি দিয়ে মিলনবিন্দু নির্দেশ করা হল। কাজেই সম্পূর্ণ অঞ্চল ধরলে

$$E=3n,\ V=n+n=2n \text{ (1·24 নং চিত্র দ্রষ্টব্য)}$$

$$F=E-V+2=n+2 \qquad (1·20)$$

ধরা যাক $c_1, c_2, c_3, c_4, \cdots$ইত্যাদি যথাক্রমে একটি রেখা দ্বারা, দুইটি রেখা দ্বারা, তিনটি রেখা দ্বারা, চারটি রেখা দ্বারা ইত্যাদি পরিবেষ্টিত অঞ্চল। স্বভাবতঃই $c_1=c_2=0$। যেহেতু তলগুলি দুইবার ধরতে হবে,

$$c_1=c_3=c_5=\cdots=0\text{।}$$

$$\text{কাজেই}\quad F=c_4+c_6+c_8+\cdots=n+2 \qquad (1·21)$$

যেহেতু প্রত্যেকটি ধার সমস্তগুলি তল নির্ণয় করবার সময় দুইবার ধরতে হবে

$$2E = 4C_4 + 6C_6 + 8C_8 + \cdots = 2(3n) \text{।} \qquad (1\cdot22)$$

উপরের দুইটি সমীকরণ হতে n অপনয়ন করে

$$6 = c_4 - c_8 - 2c_{10} \qquad \ldots \qquad (1\cdot23)$$

কাজেই $c_4 \geqslant 6$ এবং $2E \geqslant 24$ বা $E \geqslant 12$। একটি সমতল অঞ্চলে E দুইবার গুণতে হবে। সুতরাং সমবাহু ত্রিভুজাকার টালি দিয়ে ঢাকতে অঞ্চলটি অন্ততঃ ষড়ভুজাকার হবে বা তার চেয়ে বেশী সংখ্যক ভুজ থাকবে। বিশদ আলোচনার জন্য কুখম্যান [*11*], টুটে [*12*] এর প্রবন্ধের উল্লেখ করা হল।

সবশেষে সহজপাঠের জন্য উল্লেখ করা হল ম্যাকমাহন [*13*]। টালির নমুনার আলোচনা এখানেই ইতি করে পরিচ্ছেদের কিছু প্রশ্নমালা অভ্যাসের জন্য মেধাবী ছাত্রদের নিকট রাখা হল, শিক্ষকরা অবশ্যই উত্তর করতে সাহায্য করবেন।

প্রশ্নমালা

1. $G_2(5)$ টালির নমুনা নির্ণয় কর।

2. যদি T^{-1}, T-এর বিপরীত ঘূর্ণন নির্দেশ করে এবং যদি S ও T যথাক্রমে, P ও Q-কে কেন্দ্র করে $\frac{2\pi}{n}$ কোণ পরিমাণ ঘূর্ণন হয়, $T^{-1}ST$ কি নির্দেশ করবে এ'কে দেখাও।

3. আরশোলার ছবি দিয়ে মাথা উপরের দিকে রেখে 45°, 135° রম্বসকে ভিত্তি করে ষট্‌দিকে প্রতিসাম্য ও প্রতিসরণের প্রতিসাম্য রেখে টালি শ্রেণীবিন্যাস কর।

4. একটি আয়তক্ষেত্র 68 মি.মি চওড়া ও 324 মি.মি. লম্বা। ইহাকে সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট 6টি ট্রাপিজিয়ামে ভাগ কর ও শেষের দুইটি ট্রাপিজিয়ামের ক্ষেত্রফল অপরগুলির অর্ধেক অর্থাৎ শেষ দুইটি আঠা দিয়ে লাগিয়ে দিতে হবে। এক্ষেত্রে প্রমাণ কর যে ভূমিসংলগ্ন সূক্ষ্মকোণ θ স্বর্ণ-অনুপাত সম্বন্ধ অনুসারী অর্থাৎ $\tan\theta = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ এবং দুইটি সমান্তরাল বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 12 মি.মি.।

5. একটি নির্দিষ্ট আয়তক্ষেত্রকে একটি বর্গক্ষেত্র ও একটি আয়তক্ষেত্রে ভাগ কর যাতে দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের অনুপাত উভয় আয়তক্ষেত্রেরই একই থাকে। যদি এরূপ সম্ভব হয় দেখাতে হবে যে অনুপাতটি $(\sqrt{5}+1) : 2$ [স্বর্ণ-অনুপাত]। আমরা যদি 10 বার বিভাজন করি, বর্গক্ষেত্রাকার অঞ্চলগুলির যোগফল কত ?

6. যে কোন বহুভুজ টালিকে দুইটি অনুরূপ টালিতে কি ভাগ করা যায়? অথবা যে কোন দুইটি বহুভুজ টালিকে দুইভাগে ভাগ করে চারটি টালিতে ভাগ করা যায়? উদাহরণ দিয়ে দেখাও।

7. উদাহরণ দিয়ে দেখাও যে ষড়ভুজ অঞ্চল সমবাহু ত্রিভুজ টালি দিয়ে ঢাকলে চারটি রেখা বা ধার দিয়ে পরিবৃত অঞ্চলের সংখ্যা 6 অপেক্ষা সংখ্যায় বেশী বা উহার সমান।

8. সংবদ্ধ ষড়ভুজ টালির অলঙ্করণ কর যখন $x_1 = 135°$, $x_1' = 45°$ (1.12(*b*) নং চিত্র দ্রষ্টব্য)।

9. পঞ্চভুজ টালিগুলি রং দিয়ে পরিসীমিত কর এবং ষড়ভুজ অঞ্চলের অলঙ্করণ পৃথকীকরণ কর যাতে টালির নমুনা সুপরিস্ফুট হয়ে ওঠে।

10. যোদ্ধা, অশ্ব বা সিংহগুলিকে বিভিন্ন রং দিয়ে সুপরিস্ফুট কর যাতে তারা যেদিক-মুখী আছে বা যেরূপ অশ্বারূঢ় পরিষ্কার ভাবে বুঝা যায়।

A mathematician, like painter is a maker of patterns. If his patterns are more permanent than theirs, it is because they are made with ideas.

—Hardy

গ্রন্থপঞ্জী:

1. রাইমার, এন্, ডব্লিউ—[1] 63 (1979) পৃঃ 1-7।
2. এগার, এম্, এইচ্—[1] 63 (1979) পৃঃ 36-39।
3. কোক্সিটার, এইচ্, এম্, এস্—Introduction to Geometry (1962), (Wiley)।
4. কাণ্ডি, এইচ্, এম্ ও রোলেট্, এ, পি—Mathematical models (1961) (Oxford)।
5. লকউড্, ই, এইচ্ ও ম্যাকমিলান, আর, এইচ—Geometric symmetry (Cambridge University Press)।
6. ডান্, জে, এ—[1] 55 (1971) পৃঃ 366-369।
7. লেমার, ডি, এইচ্ ও লেমার, এমা—[2] 86 (1979) পৃঃ 725-773।
8. শাট্স্নাইডের, ডি—[2] 85 (1978) পৃঃ 439-450।

9. বাডেন, এফ্ জে—The fascination of groups (Cambridge University Press), (1972)।

10. নিম্যান জে—[2] 85 (1978) পৃঃ 489-490।

11. কুখম্যান, ই—[2] 88 (1981) পৃঃ 148-753।

12. টুটে, ডব্লিউ, টি—Proc. Camb. Phil A 44 (1948), 463-482।

13. ম্যাকমাহন, পি, এ,—New Mathematical Pastimes (Cambridge University Press)।

দ্বিতীয় পরিচ্ছেদ

কোণের নির্দিষ্ট সমঅংশে বিভাজন এবং বৃত্তস্থ সুষম বহুভুজ অঙ্কন

1. প্রথমে উল্লেখ করি যে পরিচ্ছেদের প্রথম সমস্যা সমাধানে চমক এনেছিলেন গাউস্ (1775—1855)। ইউক্লিডের জ্যামিতির নিয়মে মাপনী ও কম্পাসের বাইরে কিছু ব্যবহার নিষিদ্ধ। এই জ্যামিতির কোন অঙ্কন অন্য কিছু দিয়ে চলবে না। কিন্তু আমরা সময়ে সময়ে কিছু ব্যতিক্রম করব যাতে ছাত্রদের মেধার ধার শাণিত হয় ও শিক্ষকগণ ছাত্রদের বুদ্ধি প্রয়োগের প্রণালী দেখিয়ে দিতে পারেন। গাউস্ সমবাহু ত্রিভুজ মাপনী ও কম্পাসের সাহায্যে আঁকেন এবং ইহাই ইউক্লিডের জ্যামিতির প্রথম উপপাদ্য অর্থাৎ Euclid I.1। তারপর একটি বর্গক্ষেত্র আঁকেন। ইহার স্থান ইউক্লিডের চতুর্থ খণ্ডের ষষ্ঠ উপপাদ্য বা Euclid IV.6। সমবাহু পঞ্চভুজ আঁকেন (Euclid IV.11) এবং সুষম ষড়বাহু আঁকেন (Euclid IV.15)। ইহার পর আঁকেন সুষম পঞ্চদশভুজ (Euclid IV.16)। তিন, চার, পাঁচ পনের বাহুর সুষম বহুভুজ অঙ্কনের পর তাঁর সন্দেহ হয় যে সম্ভবতঃ সুষম বহুভুজ অঙ্কন করা সম্ভবপর যদি বাহুগুলির সংখ্যা ফেরম্যাটের মৌলিক সংখ্যা হয় বা উহাদের যুগ্মসংখ্যা হয়। এই আবিষ্কার গাউস তাঁহার মাত্র ঊনিশ বৎসর বয়সে করেন। স্বভাবতঃই বিজোড় মৌলিক সংখ্যার গুণফলই আমাদের চিন্তনীয়। ফেরম্যাটের মৌলিক সংখ্যা নীচের সম্বন্ধ হতে পাওয়া যায়—

$$F_n = 2^{2^n} + 1, \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (2{\cdot}1)$$

অর্থাৎ $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$, $F_4 = 65537$। যেহেতু 7, 11, 13 ইত্যাদি ফেরম্যাট মৌলিক সংখ্যা নহে, মাপনী ও কম্পাসের সাহায্যে সুষম সপ্তভুজ, একাদশভুজ বা ত্রয়োদশভুজ অঙ্কন সম্ভব হবে না। পুনরায় F_5 মৌলিক সংখ্যা নহে কারণ F_5-এর একটি উৎপাদক 641 যদি $F_5 = 2^{32} + 1 =$ 4294967297। যদিও 641 যে F_5-এর একটি উৎপাদক তার নানা প্রমাণ আছে, আমরা এখানে একটি সহজ প্রমাণ দেব। অবশ্য হার্ডি ও রাইট্ [1] এর পাঠ্যপুস্তকেও একটি প্রমাণ পাওয়া যাবে। F_6-এর ক্ষেত্রেও একইরূপ একটি মৌলিক উৎপাদক আছে 274177 (উইলিয়াম্‌স্ [2] দ্রষ্টব্য)। যে প্রমাণ F_5-এর ক্ষেত্রে দেওয়া হবে F_6 এর ক্ষেত্রেও একইরূপ প্রমাণ দেওয়া হবে।

ধরা যাক p একটি মৌলিক সংখ্যা এবং $p = aq + r$ ও $n = aq' + r'$। তবে n, p দ্বারা বিভাজ্য যদি $q'r - qr'$, p দ্বারা বিভাজ্য হয়। ইহার সত্যতা সহজেই প্রমাণিত যেহেতু—

$$q'r - qr' = q'r + aqq' - aqq' - qr' = q'p - qn\text{।}$$

এখন আমরা দেখতে চেষ্টা করব 2^7q+1 এবং $2^{32}+1$ এর কোন সাধারণ উৎপাদক আছে কিনা। যেহেতু—

$$2^{32}+1=2^7.2^{25}+1,$$

$2^7.q+1$, $2^{32}+1$ এর উৎপাদক যদি $2^7.q+1$, $2^{25}-q$ এর উৎপাদক হয়। একইরূপে অগ্রসর হয়ে 2^4+q^4 এবং $2^7.q+1$ এর একই উৎপাদক থাকবে। কোন q এর জন্য ধরি $2^4+q^4=2^7q+1$ বা $2^7-q^3=\frac{2^4-1}{q}$। ইহা সত্য হতে হলে $q=3$ বা 5। যদি $q=5$ হয়, উপরের সম্বন্ধের উভয় পক্ষ সমান ও মৌলিক উৎপাদক $2^7.5+1=5.128+1=641$। একইরূপে $F_6=2^{64}+1$ এর জন্য $2^8.q_1+1$ রূপ উৎপাদক পরীক্ষা করে দেখব। পূর্বোক্তরূপ নিম্নের সমীকরণ লিখলাম ঃ

$$2^8q_1+1=2^{24}-q_1{}^5,\ q_1 \text{ একটি পূর্ণসংখ্যা।}$$

সুতরাং $2^8+q_1^4=\frac{2^{24}-1}{q}$ ... ... (2.2)

$2^{24}-1$ এর উৎপাদকগুলি লেখা সহজ। ইহার একটি যুগ্ম উৎপাদক $3.3.7.17=1071$। বারম্বার পরীক্ষায় দেখা যায় যে যদি $q_1=1071$ হয় (2·2) সমীকরণের সমাধান হবে। সুতরাং $2^8.1071+1$ সন্ধানের উৎপাদক, অর্থাৎ 274177, F_6 এর একটি মৌলিক উৎপাদক। এখন প্রশ্ন স্বভাবতঃই মনে জাগে যে F_n কোন অপর বৃহত্তর n এর মানের জন্য মৌলিক সংখ্যা হতে পারে কি না। এখন জানা গেছে যে যদি F_n, $3^{(F_n-1)/2}+1$ এর বিভাজক হয়, ইহা পুনরায় মৌলিক সংখ্যা হতে পারে। $5\leqslant F_n\leqslant 16$ এর জন্য F_n যুগ্মসংখ্যা।

আমাদের যে দাবী নিয়ে এই আলোচনা শুরু করেছিলাম তার পুনরুক্তি করে বলছি যে n-বিশিষ্ট সমবাহু বহুভুজ মাপনী ও কম্পাসের সাহায্যে অঙ্কন করা যাবে যদি,

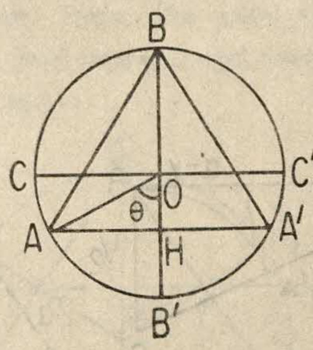
$$n=F_0.\,F_1,\ F_0F_1,\ F_2,\ F_0F_2,\ F_1F_2,\ F_0F_1F_2 \text{ ইত্যাদি হয়।}$$

উপরে সংখ্যাগুলিকে যুগ্মপ্রণালীর প্যাস্কালের ত্রিভূজ এঁকে বর্ণনা দেওয়া যায়। এখানে 0, 1 দুইটি মাত্র সংখ্যা ও $1+1=0$, $1+0=0+1=1$।

1	
1 1	—3
1 0 1	—5
1 1 1 1	—3×5
1 0 0 0 1	—17
1 1 0 0 1 1	—3×17
1 0 1 0 1 0 1	—5×17
1 1 1 1 1 1 1 1	—3×5×7
1 0 0 0 0 0 0 0 1	—257 ... (2.3)

গাউসের যুগান্তকারী আবিষ্কার যে ফেরম্যাট মৌলিক সংখ্যা বা তাহাদের তৈরী যুগ্ম-সংখ্যার সংখ্যক সুষম বহুভুজ মাপনী ও কম্পাস সাহায্যে কেবলমাত্র আঁকা যায় তার স্বীকৃতি হিসাবে গটিংগেন বিশ্ববিদ্যালয় তাঁর মূর্তির পাদদেশে সপ্তদশবাহু বিশিষ্ট সুষম বহুভুজ নির্মাণ করেছেন। রিচেলট ও শোয়েণ্ডেনভাইন 1898 খৃষ্টাব্দে 257-সুষম বহুভুজ এবং হার্মিস 65537-সুষম বহুভুজ অঙ্কনের প্রণালী 10 বৎসর চেষ্টার পর পেতে সফল হয়েছিলেন। প্রচেষ্টার পাণ্ডুলিপি এখনও দেখতে পাওয়া যায় (কোক্সিটার [3])। যে নীতির উপর নির্ভর করে অঙ্কন করা হয় তা প্রধানতঃ ত্রিকোণমিতির সম্বন্ধ $\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$। ইহাতে $x = \tan\theta$ ধরলে একটি সমীকরণ পাওয়া যায়, অর্থাৎ $x^2 + 2x\cot 2\theta - 1 = 0$ এবং ইহাদের সমাধান দুটি $\tan\theta, -\cot\theta$। গাউস্ যখন চিন্তা করছিলেন ভাষাতত্ত্ব পড়বেন না গণিত পড়বেন তখন তাঁর এই আবিষ্কার তাঁকে গণিতের দিকে টেনে এনেছিল।

বাহুর সংখ্যা n হলে $n=3$ এর জন্য সমবাহু ত্রিভুজ আঁকা সাধারণ ও বৈচিত্র্যহীন। তথাপি আমরা একটি বৃত্তের একটি ব্যাস নিলাম (2·1 নং চিত্র দ্রষ্টব্য)। H বিন্দু



2.1 নং চিত্র

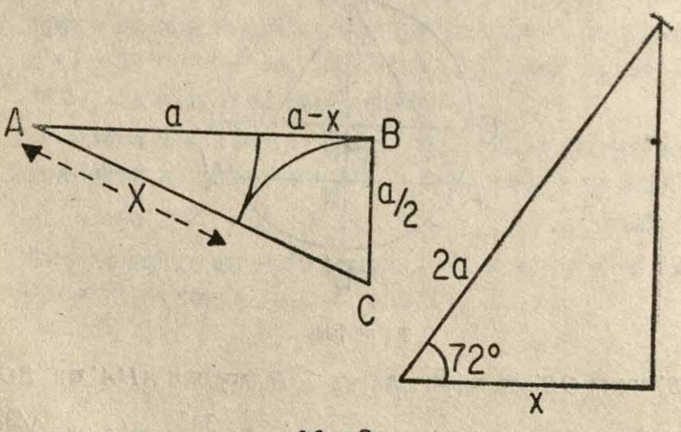
BOB' ব্যাসের OB' এর অর্ধদূরত্বে অবস্থিত। H বিন্দু দিয়ে AHA' জ্যা BOB' এর উপর লম্ব। ধরা যাক $AH = x$। তবে $x^2 = \frac{3a^2}{4}$ অর্থাৎ $x = \frac{\sqrt{3}a}{2}$।

সুতরাং $\tan AOH = \frac{\sqrt{3a}}{2}\Big|_{a/2} = \sqrt{3}$ অর্থাৎ $\tan\ \theta = \tan\ AOH = \sqrt{3}$;

$\tan 2\theta = \frac{2.\sqrt{3}}{1-3} = -\sqrt{3} = \tan\ \frac{2\pi}{3}$। অতএব ABA' নির্দিষ্ট ত্রিভুজ হল

যাহা বৃত্তস্থ ও সমবাহু এবং কোণগুলি সমান। বিকল্পে, $COC' = 2a$ এবং বৃত্ত হতে $C'D = a$ বৃত্তচাপ এঁকে কেটে নিলাম। তবে $CD = \sqrt{4a^2 - a^2} = \sqrt{3a}$। CBD বৃত্তের এক তৃতীয়াংশ দিচ্ছে।

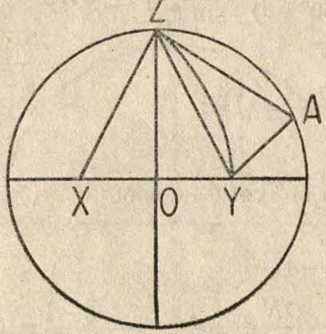
আমরা সুষম পঞ্চভুজের ক্ষেত্রেও একইরূপে অগ্রসর হব। সুষম পঞ্চভুজের ক্ষেত্রে বৃত্তের কেন্দ্র $\frac{2\pi}{5} = 72°$ আঁকতে হবে। আমাদের জানা আছে যে $\frac{\pi}{5} = 36°$ এবং $\cos 72° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, $\cos 36° = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$। সাধারণ নিয়ম অনুসারে লেখা উচিত $\cot\frac{4\pi}{5} = -\cot\frac{\pi}{5}$ এবং $x^2 + \frac{2x}{y} - 1 = 0$ ও $y^2 - \frac{2y}{x} - 1 = 0$ সমাধানের জন্য কারণ $\cot\frac{4\pi}{5} = -\cot\left(\frac{\pi}{5}\right)$। অবশ্য $\frac{2\pi}{5}$ কোণটির ধর্ম এই যে একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজে যদি শীর্ষকোণ ভূমিসংলগ্ন কোণদুটির অর্ধেক হয়, এই কোণদুটির মান $\frac{2\pi}{5}$ হবে। এরূপ ত্রিভুজ আঁকতে হলে $\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5a^2}{4}$ সমীকরণের সমাধান করতে হবে। সমাধান করে দেখা যাচ্ছে $\frac{x}{2x} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \cos 72°$। অঙ্কনের জন্য 2.2 নং চিত্র দ্রষ্টব্য।



2.2 নং চিত্র

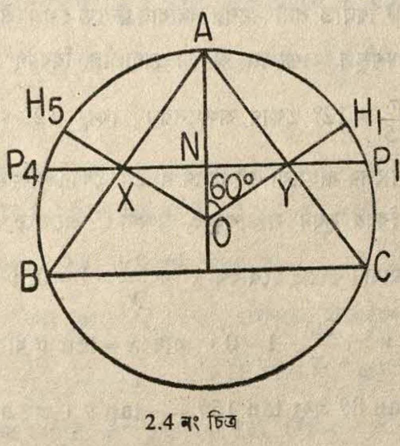
$AB = a$ আঁকা হল এবং $BC = \frac{a}{2}$, AB এর উপর লম্ব। AC যোগ করে AC হতে $\frac{a}{2}$ বিয়োগ করে x পেলাম। সুতরাং $\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5a^2}{4}$। 72° কোণ মাপনী ও কম্পাস সাহায্যে অঙ্কনের প্রণালী দেওয়া হল। বৃত্তের উপরের অঙ্কনপ্রণালী

দিয়ে আঁকতে হলে $OX=\frac{a}{2}$ (2.3 নং চিত্র দ্রষ্টব্য)। $XZ=\frac{\sqrt{5}}{2}a$। $XZ=XY$, সুতরাং $OY=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a$। কাজেই $ZY=a.\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}=2a\sin 36°$।



2.3 নং চিত্র

অতএব ZY বৃত্তের একপঞ্চমাংশ। ZA কে ZY এর সমান করে কেটে নিলেই সুষম পঞ্চভুজের একবাহু পাওয়া যাবে। উপরের বর্ণিত প্রণালী সত্ত্বেও একটি বিকল্প সামান্য প্রণালী দেওয়া হল। প্রণালী সম্বন্ধে ধারণা ত্রিভুজ অঙ্কনের বিকল্প প্রথা হতে আন্দাজ হবে (2.4 নং চিত্র দ্রষ্টব্য)।



2.4 নং চিত্র

AO বৃত্তের ব্যাসার্ধ। ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কন করা হল যার উচ্চতা $\frac{5}{4}AO$। AOH_1, AOH_5 কোণদ্বয় 60° সমান করে অঙ্কন করা হল। $AB \cap OH_5$

ও $AC \cap OH_1$ যোগ করে বৃত্ত পর্যন্ত বর্ধিত করা হল। P_1, P_4 বৃত্তস্থ বিন্দুদ্বয় পাওয়া গেল। AP_1 বৃত্তের একপঞ্চমাংশ AP_1 পরিমাণ পাঁচবার এঁকে বৃত্তস্থ সুষম পঞ্চভুজ পাওয়া যাবে। প্রমাণস্বরূপ সামান্য ত্রিকোণমিতি ব্যবহার করব।

$$\frac{AY}{\sin 60^\circ} = \frac{AO}{\sin (60^\circ + \theta)} = \frac{OY}{\sin \theta}, \quad \angle OAC = \theta।$$

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{16}}}{5a/4} = \sqrt{\frac{3}{5}}।$$

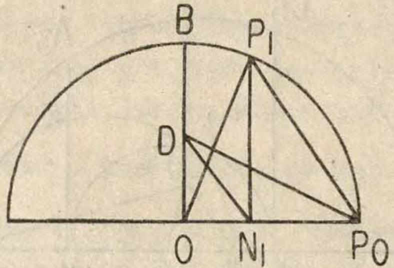
সুতরাং, $OY = \dfrac{a}{\sin 60^\circ \cot \theta + \cos 60^\circ} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}+1}$।

কাজেই $ON = \dfrac{a}{\sqrt{5}+1}$ ... ... (2.4)

অতএব $\cos P_1OA = \dfrac{ON}{a} = \dfrac{1}{\sqrt{5}+1} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4} = \cos 72^\circ$,

অর্থাৎ $\angle P_1OA = 72^\circ$। একটি বিষয় লক্ষ্য করবার আছে যে ত্রিভুজ আঁকতে হলে দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান দরকার হয়। জ্যামিতির সাহায্যে ইহা বেশ সহজ। সুষম পঞ্চভুজ আঁকতে হলে চতুর্ঘাত সমীকরণের সমাধান দরকার হয়। যে কোন সাধারণ চতুর্ঘাত সমীকরণের সমাধান করতে পূর্বে নির্দিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান করে পুনরায় আর একটি দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান করতে হয়। উপরের আলোচনার পর আমরা সুষম পঞ্চদশভুজ অঞ্চলের অঙ্কন প্রণালীর বিবরণ দিব। স্বভাবতই আমাদের দরকার $\frac{\pi}{15} = 12^\circ$ কোণ অঙ্কনের। কিন্তু $12^\circ = 72^\circ - 60^\circ$ এবং কাজেই মাপনী ও কম্পাসের সাহায্যে এই কোণ বা 24° কোণ অঙ্কন সম্ভব। ইহার পরবর্তী আলোচনার বিষয় সুষম সপ্তদশভুজ অঙ্কন। এক্ষেত্রে আমাদের চারিটি দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান করতে হবে যথা $x^2 + \frac{2x}{y} - 1 = 0$, $y^2 + \frac{2y}{y} - 1 = 0$, $z^2 + \frac{2z}{w} - 1 = 0$, $w^2 + \frac{2w}{x} - 1 = 0$। যদি $x = \tan \theta$ ধরি, $y = \tan 2\theta$, $z = \tan 4\theta$, $w = \tan 8\theta$ এবং $\tan 16\theta = -\tan \theta$। অতএব $\theta = \frac{\pi}{17}$ হবে। কাজেই $\tan \frac{\pi}{17}$ পেতে হলে ষোড়শবর্গীয় সমীকরণের সমাধান করতে হবে। এই বিশেষ ক্ষেত্রে নিম্নরূপ অঙ্কন প্রণালী হবে। দেখা যাবে যে ত্রিভুজ ও পঞ্চভুজ অঙ্কন

প্রণালীর সঙ্গে কিছুটা সাদৃশ্য রয়েছে। পঞ্চভুজ আঁকার প্রণালীর জন্য নেলসনের [4] প্রবন্ধ কিছুটা সাহায্য করবে। সুষম সপ্তদশভুজ আঁকবার পূর্বে সুষম পঞ্চভুজ আঁকবার বিকল্প সংক্ষিপ্ত বিবরণ দেওয়া হল। OP_0 ব্যাসার্ধের উপর OB ব্যাসার্ধ



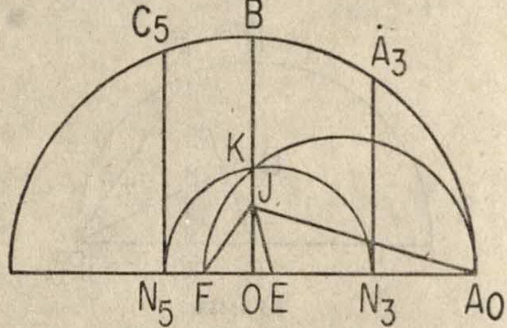
2.5 নং চিত্র

লম্ব আঁকলাম। D, OB এর মধ্যবিন্দু। $\angle ODP_0$ কোণকে DN_1 দিয়ে সমদ্বিখণ্ডিত করে N_1, OP_0 রেখার উপর পাওয়া গেল (2.5 নং চিত্র দ্রষ্টব্য)। N_1P_1, OP_0 এর উপর লম্ব টানা হল এবং P_1 বৃত্তস্থ বিন্দু। P_0P_1 বৃত্তের পঞ্চমাংশ হবে। কারণ $\cos\theta = \cos P_0OP_1 = \dfrac{ON_1}{OP_1} = \dfrac{1}{2}\tan\dfrac{\phi}{2}$, $\phi = \angle ODP_0$ অর্থাৎ $\tan\phi = 2$।

সুতরাং, $\tan\dfrac{\theta}{2} = 1 - \tan^2\dfrac{\phi}{2}$। $\tan\dfrac{\phi}{2}$এর ক্ষেত্রে $2\cos\theta$ বসিয়ে পেলাম $1 - 4\cos^2\theta - 2\cos\theta = 0$, অর্থাৎ $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4} = \cos 72^\circ$। কাজেই $\theta = 72^\circ$। ... ... (2·5)

এখন সুষম সপ্তদশভুজের অঙ্কন প্রণালীর অন্যান্য সুষম বহুভুজের অঙ্কনপ্রণালীর সাদৃশ্য পরিষ্কার হবে (2.6 নং চিত্র দ্রষ্টব্য)। $P_0P_1 \ldots P_{16}$ সপ্তদশভুজ নির্দেশ করবে। OB ব্যাসার্ধ OA_0 ব্যাসার্ধের উপর লম্ব। OJ, $\dfrac{OB}{4}$ এর সমান নেওয়া হল। A_0J যোগ করা হল। $\angle OJA_0$ কোণকে সমচতুঃখণ্ডে বিভক্ত করা হল, অর্থাৎ $\angle OJE = \dfrac{1}{4}\angle OJA_0$। $\angle FJE$ কোণ 45° এর সমান করে আঁকা হল। FA_0 ব্যাসের উপর অর্ধবৃত্ত আঁকা হল এবং ইহা OB কে K বিন্দুতে ছেদ করে। E বিন্দুকে কেন্দ্র করে এবং EK ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত আঁকা হল এবং ইহা N_3 ও N_5 দুটি বিন্দুতে OA_0 রেখাকে ছেদ করে। N_3 এবং N_5 বিন্দুতে OA_0 এর উপর লম্ব টানলাম। ঐ লম্বদুটি BA_0 মূলবৃত্তকে P_3 এবং P_5 বিন্দুদ্বয়ে ছেদ করে।

এখন প্রমাণ করতে হবে যে A_3A_5 বৃত্তচাপ দৈর্ঘ্যে সম্পূর্ণ বৃত্তপরিধির $\frac{2}{17}$ অংশ উপরের অঙ্কন প্রণালী রিচ্‌মণ্ডের [5]। প্রণালীটি যথেষ্ট সহজ ও সংক্ষিপ্ত।



2.6 নং চিত্র

পুরাপুরি জ্যামিতিক প্রমাণে অতিরিক্ত করণীচিহ্নযুক্ত সংখ্যা আসবে বলে সংক্ষিপ্তকরণের জন্য তাহাদের দশমিক আসন্নমান বসাব। প্রমাণ করব যে $\angle A_3OA_5 = \frac{4\pi}{17}$।

আমাদের জানা আছে $\cos \angle A_0OA_2 = \frac{ON_3}{a}$, $a = OA_0$, $EN_3 = EK$,

$EK^2 = OK^2 + OE^2$, $OK^2 = OF \cdot OA_0 = \frac{a^2}{4} \tan\left(45° - \frac{\phi}{4}\right)$

কারণ $\varphi = \angle A_3JO$, $OE = \frac{a}{4} \tan\phi$, $\tan\phi = \frac{a}{a/4} = 4$,

সুতরাং

$$\frac{a^2}{4} \tan\left(45° - \frac{\phi}{4}\right) = \cdot 12a^2 \qquad \ldots \qquad (2.6)$$

$\cos\angle A_0OA_5 = -\cos\angle A_5ON_5 = -\frac{ON_5}{a} = -\frac{EK - OD}{a}$ ।

(2.6) এর সাহায্যে $\phi \simeq 76°$, $OE = \frac{a}{4} \times \cdot 3443 \simeq \cdot 0861a$,

$ON_3 = a\sqrt{(\cdot 0861)^2 + \left(\frac{OK}{a}\right)^2} \simeq \cdot 44a$ । সুতরাং

$\cos \angle A_0OA_3 - \cdot 44 = \cos 64°$, অর্থাৎ $\angle A_0OA_3 = 64°$ ।

$\cos \angle A_0OA_5 \simeq -(\cdot 35 - \cdot 09) = -\cdot 26 \simeq \cos 105°$ অর্থাৎ,

$\angle A_0OA_5 = 205°$ । সুতরাং $\angle A_3OA_5 = 105° - 64°$

$$= 41° \simeq \frac{4\pi}{17} \quad \ldots \quad (2.7)$$

অঙ্কনের জটিলতা অবশ্যই লক্ষ্যণীয়। কিন্তু অঙ্কন প্রণালীর সাফল্যের কারণ অনুসন্ধান খুব কঠিন নহে। আমরা যদি $\frac{4\pi}{17}=\psi$ লিখি এবং $\frac{\pi}{17}=\theta$, তবে $4\theta=\psi$। θ নির্ণয় করবার সমীকরণের বর্গীয় মান 16। একটি দ্বিঘাত সমীকরণের মূলে একটি করণীবিশিষ্ট সংখ্যা থাকে। চতুর্ঘাত সমীকরণে অষ্টঘাত সমীকরণের অনুরূপ কারণে করণীর উপর করণী চিহ্নযুক্ত সংখ্যা, করণীর উপর করণী ও তাহার উপর করণী চিহ্নযুক্ত সংখ্যা মূলে থাকবে। ষোড়শঘাত সমীকরণে (করণী)^3 করণীর উপর চিহ্ন দিয়ে সংখ্যা মূলে থাকবে। কাজেই যেহেতু $\tan\psi=\tan\frac{1}{4}\left(\frac{16\pi}{17}\right)$, $\tan\psi$ এর সমীকরণের সমাধানে বর্গকরণীযুক্ত সংখ্যা থাকবে। ইহার উপযোগীরূপে বর্গ করলে শুধুমাত্র একটি করণীযুক্ত সংখ্যা থাকবে। ইহা দ্বিঘাত সমীকরণের সহিত যুক্ত এবং জ্যামিতিক প্রথায় মাপনী ও কম্পাসের সাহায্যে সমাধানযোগ্য। ইহা $\frac{4\pi}{17}$ বেছে নেওয়ার কারণের ব্যাখ্যা দিচ্ছে।

সুষম 51-ভুজ ইহার চতুষ্পার্শ্বস্থ বৃত্তের কেন্দ্রের $\frac{2\pi}{51}$ কোণ এক একটি বাহুদ্বারা উৎপন্ন করে। কিন্তু $\frac{2\pi}{3}+\frac{2\pi}{51}=\frac{12\pi}{17}$। কাজেই $\frac{12\pi}{17}$ কোণ আঁকতে হলে $\frac{4\pi}{17}$ এর তিনগুণ করলে চলবে। উপরের বিশ্লেষণ হতে পরিষ্কার জানা যাচ্ছে যে বাহুগুলির সংখ্যা যদি $2^{2^n}+1$ বা তাহাদের যুগ্ম সংখ্যা হয়, তবে ইউক্লিডের অনুমোদিত মাপনী ও কম্পাস সাহায্যে ঐরূপ সুষম বহুভুজ অঙ্কন সম্ভব।

কিন্তু একটি দিকের আলোচনা হয় নাইঃ কোন্ কোন্ সমীকরণ নিলে সত্বর আমরা অঙ্কনযোগ্য সমীকরণে আসতে পারব। সেদিকের বিশদ আলোচনার অসুবিধ আছে। তথাপি কিছু আলোচনা নীচে দেওয়া হল।

গাউসের বক্তব্যের গণিতের উপাদান নিম্নরূপঃ

p মৌলিক সংখ্যা হলে সুষম p-ভুজ মাপনী ও কম্পাসের সাহায্যে আঁকা যাবে যদি p ফেরম্যাটের মৌলিক সংখ্যা হয়, অর্থাৎ $p=2^k+1$, $k=2^{2^n}$। যে কোন n এর ক্ষেত্রে n-বাহু যুক্ত সুষম বহুভুজ আঁকা যাবে যদি n এর উৎপাদকগুলির ধরণ হয়

$$n=2^i\, \Pi\, p^i \quad (\Pi \text{ গুণচিহ্ন শ্রেণী নির্দেশক}), \quad \ldots \quad (2.8)$$

p বিশুদ্ধ ফেরম্যাটের মৌলিক সংখ্যা হলে, p-ভুজ বিশিষ্ট সুষম বহুভুজের শীর্ষ-বিন্দুগুলি

$$x^p-1=0 \quad \ldots \quad (2.9)$$

সমীকরণের জটিল ও একটি বাস্তব মূলগুলির বৃত্তের উপর অবস্থান দ্বারা নির্দেশিত। অবশ্যই

$$x^p - 1 = (x-1)\,(x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + 1) \quad \ldots \qquad (2.10)$$

মাপনী ও কম্পাসের সাহায্যে ঐ শীর্ষবিন্দুগুলি পেতে হলে $(p-1)$ কে 2 এর কোন ঘাত হতে হবে এবং যেহেতু p মৌলিক সংখ্যা, 2 এর ঘাতটিকেও 2 এর ঘাত হতে হবে। ইহার বিপরীত অর্থাৎ যে সুষম n-ভুজের বহুভুজ n, $n = 2^i \, \Pi \, p_i$ রূপ না হলে কখনই অঙ্কন সম্ভবপর নহে তাহার প্রমাণ দেওয়ার চেষ্টা থেকে বিরত হওয়া গেল, কারণ ইহাতে একটু উচ্চতর গণিতের দরকার হবে। 257-ভুজবিশিষ্ট সুষম বহুভুজ অঙ্কনের জন্য নীচে একটি সরল বীজগাণিতিক সমীকরণের শ্রেণী দেওয়া হল। আশা করা যায় ইহাতে ছাত্রছাত্রীদের 257-সুষম বহুভুজ অঙ্কনে কৌতূহলী করে তুলবে :—

সমীকরণ	মূলগুলি
$x^2 + x - 64$	α_{10}, α_{11}
$x^2 - \alpha_{10}x + 16(\alpha_{10} + \alpha_{11})$	α_{20}, α_{22}
$x^2 - \alpha_{11}x + 16(\alpha_{10} + \alpha_{11})$	α_{21}, α_{23}
$\alpha^2 - \alpha_{20}x + (2\alpha_{20} + 5\alpha_{21} + 4\alpha_{22} + 5\alpha_{23})$	α_{30}, α_{34}
$x^2 - \alpha_{22}x + (4\alpha_{21} + 5\alpha_{21} + 2\alpha_{22} + 5\alpha_{23})$	α_{32}, α_{36}
$x^2 - \alpha_{23}x + (5\alpha_{20} + 4\alpha_{21} + 5\alpha_{22} + 2\alpha_{23})$	α_{33}, α_{37}
$x^2 - \alpha_{30}x + (2\alpha_{30} + 2\alpha_{32} + 2\alpha_{34} + \alpha_{35} + \alpha_{36})$	α_{40}, α_{48}
$x^2 - \alpha_{31}x + (2\alpha_{31} + 2\alpha_{33} + \alpha_{35} + 2\alpha_{36} + \alpha_{37})$	α_{41}, α_{49}
$x^2 - \alpha_{32}x + (\alpha_{30} + 2\alpha_{32} + \alpha_{34} + 2\alpha_{36} + 2\alpha_{37})$	$\alpha_{42}, \alpha_{4,10}$
$x^2 - \alpha_{33}x + (2\alpha_{30} + \alpha_{31} + 2\alpha_{33} + 2\alpha_{35} + \alpha_{37})$	$\alpha_{43}, \alpha_{4,16}$
$x^2 - \alpha_{34}x + (\alpha_{30} + 2\alpha_{31} + \alpha_{32} + 2\alpha_{34} + 2\alpha_{36})$	$\alpha_{44}, \alpha_{4,12}$
$x^2 - \alpha_{35}x + (\alpha_{31} + 2\alpha_{32} + \alpha_{33} + 2\alpha_{35} + 2\alpha_{37})$	$\alpha_{45}, \alpha_{4,13}$
$x^2 - \alpha_{36}x + (2\alpha_{30} + \alpha_{32} + 2\alpha_{33} + \alpha_{34} + 2_{36})$	$\alpha_{46}, \alpha_{4,14}$
$x^2 - \alpha_{37}x + (2\alpha_{31} + \alpha_{33} + 2\alpha_{34} + \alpha_{35} + 2\alpha_{37})$	$\alpha_{47}, \alpha_{4,15}$
$x^2 - \alpha_{40}x + (\alpha_{40} + \alpha_{41} + \alpha_{42} + \alpha_{45})$	α_{50}
$x^2 - \alpha_{41}x + (\alpha_{41} + \alpha_{42} + \alpha_{43} + \alpha_{46})$	α_{51}
$x^2 - \alpha_{47}x + (\alpha_{47} + \alpha_{48} + \alpha_{49} + \alpha_{4,12})$	$\alpha_{5,23}, \alpha_{47}$
$x^2 - \alpha_{48}x + (\alpha_{48} + \alpha_{49} + \alpha_{4,10} + \alpha_{4,13})$	$\alpha_{5,24}, \alpha_{48}$

$$\begin{array}{ll}
x^2-\alpha_{49}x+(\alpha_{49}+\alpha_{4,10}+\alpha_{4,11}+\alpha_{4,14}) & \alpha_{5,25}, \alpha_{49} \\
x^2-\alpha_{4,10}x+(\alpha_{4,15}+\alpha_{4,0}+\alpha_{41}+\alpha_{44}) & \alpha_{5,15}, \alpha_{5,24} \\
x^2-\alpha_{50}x+(\alpha_{51}+\alpha_{5,23}) & \alpha_{60} \\
x^2-\alpha_{5,24}x+(\alpha_{5,15}+\alpha_{5,25}) & \alpha_{6,50} \\
x^2-\alpha_{6,0}x+\alpha_{6,50} & \alpha_{70} \\
x^2-\alpha_{7,0}x+1 & \alpha_{80}
\end{array} \quad \ldots (2.11)$$

α_{80}, $\frac{2\pi}{257}$ এর অবস্থান নির্দেশ করে। এ বিষয়ে অতিরিক্ত জানতে হলে বিশপের [6] প্রবন্ধ ও গাউসের প্রাচীন ঐতিহাসিক গ্রন্থের [7] উল্লেখ করা হল। উপরের আলোচনা দেওয়া হল ইউক্লিডের প্রাথমিক জ্যামিতি এখনও কত জীবন্ত দেখাবার জন্য। আজও এই জ্যামিতি ইউক্লিডের সময় থেকে নেপোলিয়নের সময়, যখন গাউস [7] বেঁচে ছিলেন, পার করে সমানভাবে দৃষ্টি আকৃষ্ট করে চলেছে। গাউসের এ সমস্ত কাজ সকল বিদ্বানের শ্রদ্ধা আকর্ষণ করেছে। নেপোলিয়ন, গোটিংগেন বিশ্ববিদ্যালয় সে সময়ে যে ডিউকের রাজত্বে ছিল, তাঁকে পরাজিত করে তাঁর রাজ্য দখল করে গাউসের উপর জরিমানা-কর ধার্য করেন। কিন্তু গাউসের সে পরিমাণ অর্থ ছিল না বা দেওয়ার সামর্থ্যও ছিল না। ডিউক জ্ঞানবিজ্ঞান চর্চায় বিশেষ আগ্রহী ছিলেন এবং গাউসের বেতনের বন্দোবস্ত করে দিয়েছিলেন। কিন্তু যেইমাত্র জরিমানা-করের পরিমাণ বাইরে ছড়িয়ে পড়ল, ফরাসী বিজ্ঞানীরা গাউসের প্রতি সম্মান দেখাবার জন্য সেই অর্থ দিয়ে দিয়েছিলেন। একারণেই ইউরোপের সংস্কৃতি গভীরভাবে অনুধাবন করা দরকার এবং বিদ্বানকে সম্মান প্রদর্শনের প্রথা শিক্ষণীয়।

উপরে যে আলোচনা হল সেখানে একটি বিষয় লক্ষ্যণীয় যে দুই সমকোণ π কে সমান তিন অংশে ভাগ করা হয়েছে। এই বিভাজনে সমীকরণ

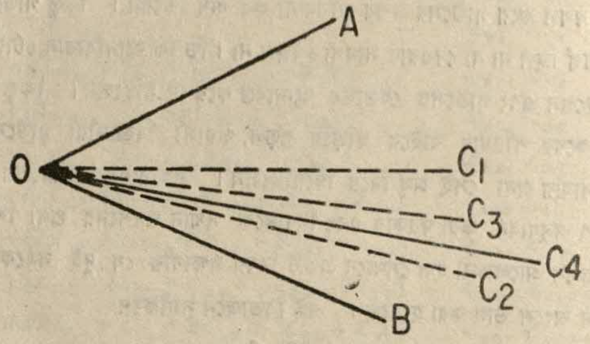
$$\left.\begin{array}{l}\cos\pi=-1=4\cos^3\theta-3\cos\theta \\ \text{বা} \quad 3\tan\theta-\tan^3\theta=0\end{array}\right\} \quad \ldots \quad (2.12)$$

(2.12) সমীকরণের মূলগুলি দৃশ্যতঃ বাস্তব। কিন্তু যে কোন কোণের জন্য সমীকরণ $\tan 3\theta=\frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}$ এর জটিল মূল আছে। কিন্তু যদি আমরা লিখি $\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ বা

$$\tan^2\theta\cdot\tan 2\theta+2\tan\theta-\tan 2\theta=0 \quad \ldots \quad (2.13)$$

এর সর্বদাই বাস্তব মূল আছে যদি সমীকরণটির $\tan\theta$ চল হয় যখন $\tan 2\theta$ জ্ঞাত এবং ইহার মান $-\infty$ হইতে $+\infty$ পর্যন্ত বিস্তৃত। কাজেই যে কোন কোণকে মাপনী ও কম্পাসের সাহায্যে জ্যামিতির প্রথায় দ্বিখণ্ডিত করা সম্ভব, যেহেতু (2.13) সমীকরণের বাস্তব মূলগুলি জ্যামিতির সাহায্যে পাওয়া যায়। যে কোন কোণকে সমান অংশে ত্রিখণ্ডিত করার সমস্যা ভিন্ন প্রকারের যদিও 3 ফেরম্যাটের মৌলিক সংখ্যা। ফেরম্যাটের ছাড়া অপর কোন মৌলিক সংখ্যার ক্ষেত্রেও অনুরূপ অসুবিধা আছে। উদাহরণ স্বরূপ $\frac{\pi}{7}$ বা $\frac{\pi}{14}$ মাপনী ও কম্পাস সাহায্যে অঙ্কনের সম্ভাব্যতা নাই। আমরা প্রথমে যে কোন কোণকে ত্রিখণ্ডিত করার সমস্যা আলোচনা করব।

2. যেহেতু কোণ ত্রিখণ্ডিত করার সমীকরণের বাস্তব মূল নাই, জ্যামিতির মাপনী ও কম্পাসের সাহায্যে ত্রিখণ্ডিত করা সম্ভব নয়। কাজেই আসন্ন ত্রিখণ্ডিতকরণের পথেই যেতে হবে। সব থেকে সহজ পথ হবে নির্দিষ্ট কোণকে প্রথমে দ্বিখণ্ডিত করা এবং একটি অংশ রেখে অপর অর্ধকে সমদ্বিখণ্ডিত করা। ইহাতে দুইটি সন্নিহিত কোণ $\angle BOC_1$ এবং $\angle C_2OB$ এর বিয়োগফল পাওয়া যাবে (2.7 নং চিত্র দ্রষ্টব্য)।



2.7 নং চিত্র

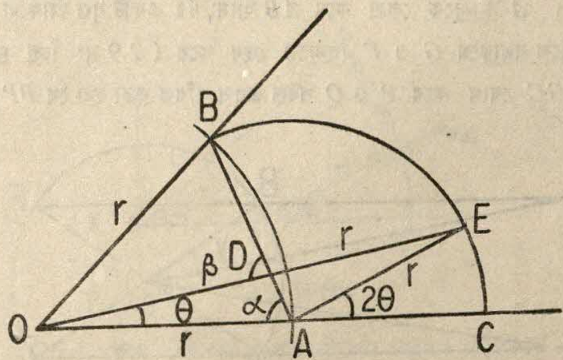
ইহার মান $\frac{\theta}{2}-\frac{\theta}{2^2}$। OC_3, $\angle C_1OC_2$ কে সমদ্বিখণ্ডিত করে $\angle BOC_3$ কোণকে আমরা পাব $\frac{\theta}{2}-\frac{\theta}{2^2}+\frac{\theta}{2^3}$। OC_4, $\angle C_2OC_3$ কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে $\angle BOC_4$ কোণকে পাওয়া যাবে $\frac{\theta}{2}-\frac{\theta}{2^2}+\frac{\theta}{2^3}-\frac{\theta}{2^4}$। সুতরাং $\angle BOC_4 \fallingdotseq \frac{\theta/2}{1+\frac{1}{2}}=\frac{\theta}{3}$। এই প্রণালী অত্যন্ত সাধারণ ও অনুরূপ সর্বক্ষেত্রে

প্রয়োগ করা যায়। উদাহরণ স্বরূপ কোন কোণকে সমান পাঁচভাগে ভাগ পাওয়া যাবে।

$$\frac{\theta}{4} - \frac{\theta}{4^2} + \frac{\theta}{4^3} \ldots\ldots \approx \frac{\theta/_4}{1+\frac{1}{4}} = \frac{\theta}{5} \text{।} \qquad \ldots \qquad (2.14)$$

কিন্তু এই প্রথায় ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র কোণের মধ্যে বারম্বার দ্বিখণ্ডক রেখা টানার অসুবিধা আছে। ইহা ক্লান্তিকর শুধু যে তাহা নহে, ইহাতে ভুল হওয়ার আশঙ্কাও আছে। কাজেই বিকল্প প্রথা নিশ্চয়ই স্বাগত। প্রথমে বিকল্প প্রথা হিসাবে নিরাসন্ন কিন্তু সঠিক ইউক্লিডের প্রথায় না গিয়ে ত্রিখণ্ডিতকরণের প্রণালী দেখাব। এই প্রণালীতে মাপনী, কম্পাস এবং সেট স্কোয়ার দরকার হবে।

একটি বিশেষ ব্যবস্থা তৈরী করেও নেওয়া যেতে পারে। একটি আয়তক্ষেত্রের একটি কোণে বৃত্তের এক চতুর্থাংশ কেটে নেওয়া হল। নীচের অঙ্কন প্রণালী হয়ত সহজতম। ধরা যাক $\angle AOB$ নির্দিষ্ট কোণ যাকে ত্রিখণ্ডিত করতে হবে। $OA = OB = r$ নেওয়া হল। একটি সরল রেখার উপর D ও E বিন্দুদ্বয় r দূরত্বে নেওয়া গেল। এই সরলরেখা $\angle AOB$ কোণের উপর রাখা যাতে D, AB রেখার উপর পড়ে এবং E বিন্দু A কেন্দ্র করে r ব্যাসার্ধের বৃত্তের উপর পড়ে এবং DE, O বিন্দুগামী। তবে OD, $\angle AOB$ কোণের ত্রিখণ্ডক (2.8 নং চিত্রে যে কোণগুলি সমান দেখান আছে তাহাদের দ্রষ্টব্য)।



2.8 নং চিত্র

ইহা বুঝা যায় যে $\beta = \alpha + \theta$ এবং $\alpha + \beta + 2\theta = \pi$ ও নির্দিষ্ট কোণটি $(\pi - 2\alpha)$।

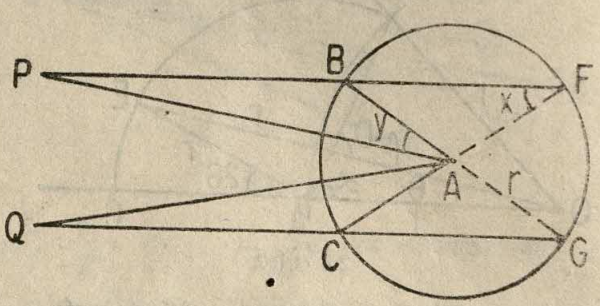
সুতরাং

$$\theta = \beta - \alpha = (\pi - \alpha - 2\theta) - \alpha \qquad \ldots \qquad (2.15)$$

অর্থাৎ, $\theta = \dfrac{\pi - 2\alpha}{3}$।

অঙ্কনের সুবিধার জন্য বৃত্তকাটা আয়তক্ষেত্র ব্যবহার না করে, D ও E বিন্দুদ্বয় এমনভাবে সেট স্কোয়ারের উপর স্থাপিত করা যেতে পারে যে সেট স্কোয়ার EDF (D বিন্দুতে সমকোণী) এমনভাবে চালিত করা হল যে ED ধার O বিন্দুতে অবস্থিত একটি আলপিনকে স্পর্শ করে এবং DF, C বিন্দুস্থিত একটি আলপিন স্পর্শ করে থাকে। যখন E, AB-এর উপর পড়বে, DE, $\angle AOB$ কোণকে ত্রিখণ্ডিত করে। এ অঙ্কন নিশ্চয়ই নির্দিষ্ট কোণকে নিরাসন্ন ত্রিখণ্ডিত করে, কিন্তু অঙ্কন শুধুমাত্র মাপনী ও কম্পাসের সাহায্যে হল না। বিশদ আলোচনার জন্য ফিন্‌লের [8] প্রবন্ধের উল্লেখ করা হল। বিশ্লেষণাত্মক আসন্নমানের প্রণালী যথাস্থানে বিবৃত হবে। অপর নিরাসন্ন (exact) কিন্তু ঠিক শুধুমাত্র মাপনী ও কম্পাসের উপর নির্ভরশীল নহে এরূপ অঙ্কনপ্রণালী $\tan(\theta - 2\varphi) = \tan\varphi$ সূত্রের উপর নির্ভর করে করা যেতে পারে। ইহার বিশদ বিবরণের দরকার নাই। এই বিবেচনা করে এটি সহজ প্রশ্ন হিসাবে রেখে দেওয়া হল।

কোণকে সমত্রিখণ্ডিত করার জন্য নীচের আসন্ন প্রণালী একটি 11 বৎসরের বালকের এবং ইহাও 20 মিনিট চিন্তা করবার ফল। ইহা উল্লেখ করা হল বিশেষ করে সৃজনাত্মক পাঠদানের কথা মনে করে। $\angle BAC$ নির্দিষ্ট কোণ ও $AB = AC$ নেওয়া হল। A বিন্দুকে কেন্দ্র করে AB ব্যাসার্ধের একটি বৃত্ত আঁকলে BA ও CA বর্ধিতাংশে যথাক্রমে G ও F বিন্দুতে ছেদ করে (2.9 নং চিত্র দ্রষ্টব্য)। FB এবং GC যোগ করে P ও Q পর্যন্ত এরূপ বর্ধিত করা হল যে $BP = 2AB$



2.9 নং চিত্র

এবং $CQ = 2AC$। P এবং Q-কে A-এর সহিত যুক্ত করা হল। PA, QA, $\angle BAC$ কোণকে সমত্রিখণ্ডিত করে। প্রমাণস্বরূপ নীচে সংক্ষিপ্ত বিবরণ দেওয়া হল। ধরা যাক $BCGF$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ r এবং $\angle BAC = 2x$, $\angle BAP = y$।

অতএব

$$\frac{r}{\sin(x-y)} = \frac{2r}{\sin y} \text{ অর্থাৎ } 2\sin(x-y) = \sin y \quad \ldots \quad (2.16)$$

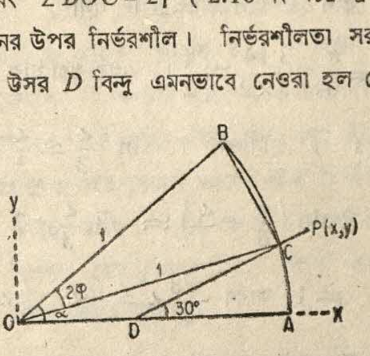
যদি $x-y$ বড় সংখ্যা না হয়,

$$2(x-y) \fallingdotseq y \text{ অর্থাৎ } y = \frac{2x}{3} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.17)$$

স্বভাবতঃ বড় কোণের পক্ষে এ অঙ্কনে ভুল বেশী হবে। ভুলের পরিমাণ সরণী আকারে দেওয়া হল :—

y	5°	10°	15°	30°	45°	60°
$2x$	15°	29°58′	44°52′	88°53′	131°24′	171°18′

কাজেই বেশী নিভু'ল প্রণালীর দরকার। নির্দিষ্ট কোণ $\angle AOB$ এর দুই বাহু $OA = OB$ নেওয়া হল এবং O বিন্দুকে কেন্দ্র করে বৃত্তের চাপ AB-এর উপর C চলমান বিন্দু এবং $\angle BOC = 2\varphi$ (2.10 নং চিত্র দ্রষ্টব্য)। φ কোণটি $\angle AOB$ কোণের মানের উপর নির্ভরশীল। নির্ভরশীলতা সরণী সাহায্যে দেওয়া হবে। OA রেখার উসর D বিন্দু এমনভাবে নেওরা হল যে DC, OA রেখার



2.10 নং চিত্র

সহিত $\angle CDA$ কোণ 30°-এর সমান উৎপন্ন করে। DC-কে বর্ধিত করে $DP = BC$ নেওয়া হল। OC, BA বৃত্তচাপকে ত্রিখণ্ডিত করবে যদি P বিন্দু এমনভাবে নেওয়া হয় যে নীচের সমীকরণের $\sin\varphi$ একটি বাস্তব মূল হয়। ধরা যাক $P(x, y)$। কাজেই

$$x = \sqrt{3}\sin\varphi + 2\sin(\beta + 2\varphi),\ y = \sin\varphi,\ \beta = 30° - \alpha,\ OA = OB = 1 \quad \ldots \quad (2.18)$$

কারণ, $BC = 2\sin\varphi = DP$, $\dfrac{OD}{\sin(30° - \alpha + 2\varphi)} = \dfrac{1}{\sin 30°}$ অর্থাৎ

$OD = 2\sin(\beta + 2\varphi)$। যদি P বিন্দুর সঞ্চারপথ C বিন্দুতে BC-এর সহিত মিলে যায় $OP^2 = OC^2 = 1$। অর্থাৎ,

$$\{\sqrt{3}\sin\varphi + 2\sin(\beta + 2\varphi)\}^2 + \sin^2\varphi = 1 \quad \ldots \quad (2.19)$$

(2.19) সমীকরণ হতে φ, α সরণী প্রস্তুত করা হল।

φ	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
$\alpha/3$	·027	·019	·012	·006	−·0002	−·006	−·012

একটি দিক লক্ষ্যণীয় যে φ-এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $\alpha/3$ প্রায় একই মানের। কাজেই P বিন্দুর φ চলমান ধরে নিয়ে সঞ্চারপথ আঁকলে ঐ সঞ্চারপথ BC-কে $\varphi = \alpha/3$ বিন্দুতে ছেদ করে। এরূপ অঙ্কন প্রণালী অনুমান করা কঠিন নহে। আমরা এখানে বলে রাখি যে যদি x রেডিয়ানে মাপা যায় ও x, $\pi/6$ অপেক্ষা ছোট বা প্রায় সমান কোণ হয় $\sin x \fallingdotseq x$। যথা

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \fallingdotseq \frac{\pi}{6} = \frac{3{\cdot}14}{3\times 2} \fallingdotseq \frac{1}{2}$$। এখন ধরা যাক $\alpha/3 < \frac{\pi}{6}$।

কাজেই P বিন্দুর y স্থানাঙ্ক, $1.\ \sin\frac{\alpha}{3} \simeq \frac{\alpha}{3}$ এবং x স্থানাঙ্ক

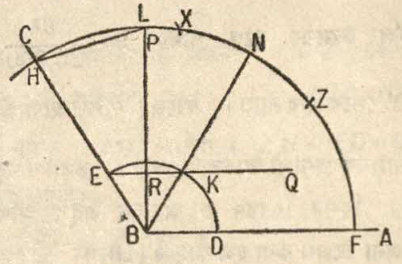
$$\sqrt{3}.\ \sin(\alpha/3) + 2\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\alpha}{3}\right) \fallingdotseq \sqrt{3}.\frac{\alpha}{3} + 2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\alpha}{3}\right)$$

$$\fallingdotseq 1 \text{ কারণ } \frac{\sqrt{3}}{3}\alpha \simeq {\cdot}6\alpha,\ \frac{2}{3}\alpha \simeq {\cdot}67\alpha।$$

কাজেই আসন্নমানে P-এর উভয় স্থানাঙ্কই C-এর স্থানাঙ্কের সঙ্গে মিলে যাচ্ছে। তবে আসন্নমান খুব বেশী সূক্ষ্ম নহে। আরও বেশী সূক্ষ্ম ত্রিখণ্ডনের দরকার আছে। উপরোক্ত আলোচনা বিশদভাবে দেখতে হলে ষ্টার্জেসের [9] নাম উল্লেখ করা হল। আশ্চর্যের বিষয় এত কলনবিদ্যা জানার পর যেসব আসন্নমানের অঙ্ক পাওয়া যাচ্ছে তার চেয়ে বেশী সূক্ষ্ম আসন্নমান আরবী হস্তলিপিতেই পাওয়া যায়। প্রথমে অঙ্কনপ্রণালীর বিবরণ দেওয়া হল। পরে আধুনিক কলনবিদ্যার সাহায্যে অঙ্কন-প্রণালীর যথার্থতা দেখান হবে।

ধরা যাক $\angle ABC$ নির্দিষ্ট কোণ এবং ইহা সমভাবে ত্রিখণ্ডিত করতে হবে। প্রথমে B বিন্দুকে কেন্দ্র করে একটি বৃত্তচাপ আঁকলাম। ইহার

BA বাহুকে *D* বিন্দুতে এবং *BC*-কে *E* বিন্দুতে ছেদ করে। (2.11 নং চিত্র দ্রষ্টব্য)।



2.11 নং চিত্র

বৃহত্তর বহিঃস্থ বৃত্তচাপ অন্তঃস্থ বৃত্তচাপের ব্যাসার্ধের তিনগুণ ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কন করা হল এবং বৃত্তচাপটি *BA*-কে *F* বিন্দুতে এবং *BC*-কে *H* বিন্দুতে ছেদ করে। *BN* ব্যাসার্ধ এ'কে $\angle ABC$ কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করা হল। *BN* অন্তঃস্থ বৃত্তচাপকে *K* বিন্দুতে ছেদ করে। পুনরায় *BL*, $\angle NBC$ কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। ইহা *EK* রেখাকে *R* বিন্দুতে ছেদ করে এবং বহিঃস্থ বৃত্তকে *P* বিন্দুতে ছেদ করে। *RK*-কে *Q* পর্যন্ত বর্ধিত করা হল এবং $KQ = HP$ করে নিলাম। *RQ* ব্যাসার্ধ নিয়ে *H* কেন্দ্র করে বৃত্তচাপ এ'কে *HX* দৈর্ঘ্য বহিঃস্থ বৃত্তচাপ থেকে কেটে নেওয়া হল। অনুরূপভাবে *FZ*, *F*-কে কেন্দ্র করে নেওয়া হল। *BX*, *BZ*, $\angle ABC$ কোণের ত্রিখণ্ডক রেখাগুলি পাওয়া গেল। এক্ষেত্রে আসন্নতার মান নির্ণয় অনেক বেশী পরিষ্কারভাবে করা যায়।

ধরা যাক $\angle ABC = 2\theta$, $\angle ABZ = 2\varphi$, $BD = r$, $BF = 3r$। অতএব

$$\left.\begin{aligned} RK = r\sin\frac{\theta}{2}, \quad HP = 6r\sin\frac{\theta}{4}\text{।} \\ HX = HP + RK = 6r\sin\frac{\theta}{4} + r\sin\frac{\theta}{2} = 6r\sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (2.20)$$

(2.20) সম্বন্ধ থেকে

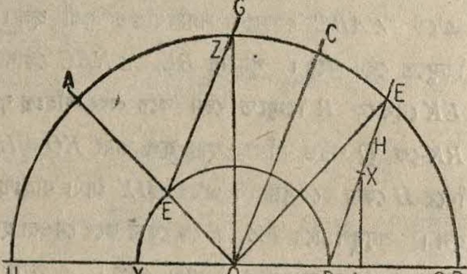
$$\sin\varphi = \sin\frac{\theta}{4} + \frac{1}{6}\sin\frac{\theta}{2},\ \sin\frac{\theta}{3} \text{ এর আসন্নমানরূপে পাই কারণ } \varphi \simeq \frac{\theta}{3} \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.21)$$

(2.21) এর ডানদিক হতে পাই

$$\sin\varphi \backsimeq \frac{\theta}{4}-\frac{\theta^3}{3!\,64}+\frac{\theta}{12}-\frac{1}{3!}\frac{\theta^3}{48}=\frac{\theta}{3}-\frac{7\theta^3}{192}\cdot\frac{1}{3!}\ \cdots \quad (2.22)$$

আসন্নমানের নির্ভুল উত্তরের সঙ্গে পার্থক্য $\backsimeq \dfrac{\theta^5}{20{,}000}$। $\theta=45°$ হলে 2φ, $\dfrac{2\theta}{3}$ হতে $20''$ সেকেণ্ডের ন্যায়। কাজেই θ বড় হলে ভ্রমশূন্যতা সন্তোষজনক নয়। আরও সন্তোষজনক প্রণালী পাওয়া দরকার। তথাপি বহুকাল পূর্বের প্রণালী মনকে নাড়া দেয়। বিশদ বিবরণ ও অন্যান্য এরূপ আশ্চর্য প্রাচীন অঙ্কন প্রণালীর তালিকার জন্য উল্লেখ করা হল ফাহ্মী [10]।

প্রথমে সুক্ষ্ম কোণ সমত্রিখণ্ডনের আরও সুক্ষ্ম প্রণালী বর্ণনা করি (2.12 নং চিত্র দ্রষ্টব্য)। $\angle AOB$ কোণ আঁকা হল এবং উহাকে OC রেখাদ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত করা হল। অবশ্যই সমদ্বিখণ্ডিত করতে DE বৃত্তচাপ আঁকা হয়েছিল। DF



2.12 নং চিত্র

এবং EG, OC-এর সমান্তরাল টানা হল। DX, OD-এর সমান করে কেটে নেওয়া হল। XL, OB-এর উপর লম্ব। O কেন্দ্র করে LOY ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্তচাপ আঁকা হল। এই বৃত্তচাপ OD, DH এবং OY-কে S, H, U বিন্দুত্রয়ে ছেদ করে এবং DF ও EG-কে H, Z বিন্দুদ্বয়ে ছেদ করে। OZ, OH যুক্ত করা হল $\angle SOH=\angle HOZ=\angle ZOA=\frac{\theta}{3}$। সামান্য প্রমাণ দেওয়া দরকার, তা নীচে দেওয়া হল।

$$\frac{SH}{\sin\frac{\theta}{3}}=\frac{OH}{\sin\left(\frac{\pi-\theta/3}{2}\right)}. \quad \text{অর্থাৎ} \quad SH=\frac{\sin\theta/3}{\cos\theta/6} \quad \cdots \quad (2.23)$$

পুনরায়

$$OH = 2\sin\frac{\theta}{6}\left(2\,OD + OD\cos\frac{\theta}{2}\right) = 2\,OD\sin\frac{\theta}{6}\left(2+\cos\frac{\theta}{2}\right) \quad \ldots \quad (2.24)$$

BCA বৃত্তচাপকে যদি সমত্রিখণ্ডন সম্ভবপর হয় D হতে রেখা টেনে, তবে E হতে রেখা টেনেও তা সম্ভবপর হবে। EZ, DH সমান্তরাল হওয়ায়, ED জ্যা, ZH জ্যাএর সমান। ইহার পরিণামে $ZH = ED = 2OD\sin\frac{\theta}{2}$ (2.25)

SH যদি ত্রিখণ্ডনের জ্যা হয়

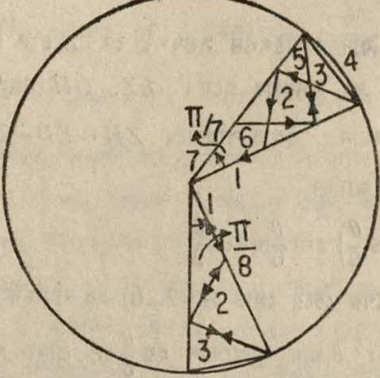
$$\left(2+\cos\frac{\theta}{2}\right)\sin\frac{\theta}{6} = \sin\frac{\theta}{2} \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.26)$$

θ যদি 2 সমকোণের চেয়ে ছোট হয় (2.26) এর বামদিক ডানদিক থেকে 5°-এর বেশী ভিন্ন হবে না। θ যদি সুক্ষ্মকোণ হয় $\frac{\theta}{3}$ তে ভ্রমের পরিমাণ 20 মিনিটের বেশী হবে না। (2.26) এর ডানদিক ও বামদিকের পার্থক্য $\frac{\theta^3}{432}$ আসন্নমানের।

কাজেই যদি θ কোণটি স্থূলকোণ হয়, ইহার সম্পূরক কোণকে সমত্রিখণ্ডিত করে সমবাহু ত্রিভুজের কোণ থেকে বিয়োগ করলে ভ্রম অনেক কম হবে। উপরের প্রণালী অনুরূপ প্রণালীর পূর্বসূরী হবে। এজন্য খান [11] এর উল্লেখ করা হল। অনেক বিভিন্ন প্রণালীর মধ্যে কয়েকটি আসন্ন ও কয়েকটি ইউক্লিডের প্রথা না মেনে ভ্রমশূন্য প্রণালী কোণ ত্রিখণ্ডিত করণের ক্ষেত্রে দেওয়া হয়েছে। কাজেই দেখা যাচ্ছে যে কোন কোণকে সমাংশে বিভক্ত করাই কঠিন নয়, এমনকি 180° বা π রেডিয়ানকে ফেরম্যাট মৌলিক সংখ্যা বাদে বা তাদের যুগ্মসংখ্যা বাদে অপর সংখ্যক সমাংশে বিভাজন বেশ শক্ত। এরূপ অঙ্কনের উদাহরণরূপে দেওয়া যেতে পারে $\frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{14}, \frac{\pi}{21}, \ldots, \frac{\pi}{11}, \frac{\pi}{22}, \frac{\pi}{33}, \ldots$ কোণগুলির মাপনী ও কম্পাসের সাহায্যে অঙ্কন। এই কোণগুলির অঙ্কন যে সুন্দর জ্যামিতির ছবির সৃষ্টি করতে পারে তার উদাহরণ নীচে দেওয়া যাবে।

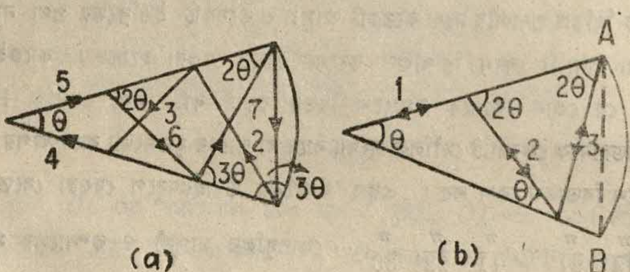
বিভিন্ন কেন্দ্রীয় কোণের যথা $\frac{180^\circ}{10}, \frac{180^\circ}{9}, \frac{180^\circ}{7}, \frac{180^\circ}{14}, \frac{180^\circ}{18}, \frac{180^\circ}{16}, \frac{180^\circ}{8}, \ldots$ বৃত্তকলার ভিতর আঁকা বাঁকা কয়েকটি সমান ধাপের পথ সম্ভব কিনা পরীক্ষা করে দেখা যাক। উদাহরণস্বরূপ $\frac{180^\circ}{7}$, $\frac{180^\circ}{8}$ বৃত্তকলার ও আঁকাবাঁকা

সমধাপের পথের নমুনা 2.13 নং চিত্রে দেওয়া। পরে অঙ্কনে সাফল্যের কারণ বিচার করা হবে।



2.13 নং চিত্র

এখন আঁকবার সাফল্যের কারণ দেখাবার জন্য $\frac{180°}{8}$ বৃত্তকলার আঁকাবাঁকা পথকে কিছুটা বড় করে দেখিয়ে 2.13(b) আঁকা হল, কিন্তু কেন্দ্রীয় কোণকে সামান্য কোণ θ লেখা হল। যেহেতু ধাপগুলি সমান, বিভিন্ন কোণগুলি 2.13(b) নং চিত্রে



2.13(a) নং চিত্র 2.13(b) নং চিত্র

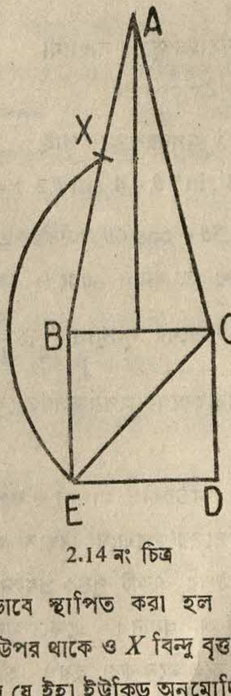
লেখা আছে। অনুরূপ ভাবে $\frac{180°}{7}$ কোণের বৃত্তকলার পথ ও কোণগুলি 2.13(a) নং চিত্রে দেওয়া হয়েছে। 2.13(a) নং চিত্রের ক্ষেত্রে $3\theta + 3\theta + \theta = \pi$ অর্থাৎ, $\theta = \frac{\pi}{7}$। একইরূপে 2.13(b) নং চিত্রে AB ছিন্ন রেখাদ্বারা যোগ করলে পাওয়া যাবে

$$2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} - 2\theta\right) + (\pi - 3\theta) = \pi$$

অর্থাৎ $\theta = \frac{\pi}{8}$।

লক্ষ্যণীয় যে বিজোড় সংখ্যা হয়ে থাকলে কোণের ভিতর আঁকাবাঁকা পথ যাওয়ার ও আসার জন্য ভিন্ন, কিন্তু জোড় সংখ্যা হয়ে থাকলে দুইটি পথই এক। 2.13(a) নং চিত্র কেবলমাত্র :আকাবাঁকা পথের নমুনা নয়, ইহা একটি সমবাহু সপ্তভুজের নমুনা, কিন্তু সমকোণী নহে। সুষম হউক বা সমবাহু হউক, $\frac{\pi}{7}$ কোণ অঙ্কনের দরকার হবেই সমবাহু সপ্তভুজ আঁকতে গেলে পর। নীচে আর্কিমিডিসের $\frac{\pi}{7}$ কোণ আঁকবার প্রণালীর সঙ্গে বিকল্প প্রথার তুলনা করব।

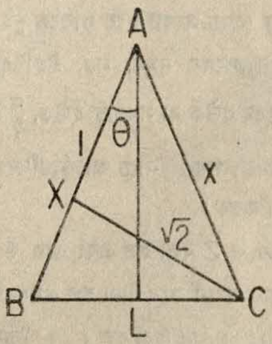
মাপনীর দুই শীর্ষকে A ও Z বলা হল এবং তার উপর X একটি বিন্দু নেওয়া হল। BC রেখা AX-এর সমান করে টানা হল এবং $BCDE$ বর্গক্ষেত্র আঁকা হল। BC-এর উপর লম্বদ্বিখণ্ডক অঙ্কন করা হল। C বিন্দুকে কেন্দ্র করে CE ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্তচাপ আঁকা হল (2.14 চিত্র দ্রষ্টব্য)।



2.14 নং চিত্র

এখন মাপনীর AX এমনভাবে স্থাপিত করা হল AZ, B বিন্দু দিয়া যায় এবং A, BC-এর লম্বদ্বিখণ্ডকের উপর থাকে ও X বিন্দু বৃত্তচাপের উপর পড়ে। উপরের অঙ্কনপ্রণালী থেকে বুঝা যায় যে ইহা ইউক্লিড অনুমোদিত নহে। $\angle BAC$ কোণের মান $\frac{\pi}{7}$।

প্রমাণের জন্য সংক্ষিপ্ত বিবরণ দেওয়া হল। $BC = AX$-কে যদি একক দৈর্ঘ্য ধরা হয় এবং $AC = x$, $\angle BAC = 2\theta$ (2.15 নং চিত্র দ্রষ্টব্য)। ABC ত্রিভুজে



2.15 নং চিত্র

$$2x \sin \theta = 1 \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.27)$$

এবং AXC ত্রিভুজ হতে কোসাইন সূত্রের সাহায্যে

$$2 = 1 + x^2 - 2x \cos 2\theta \qquad \ldots \quad \ldots \quad (2.28)$$

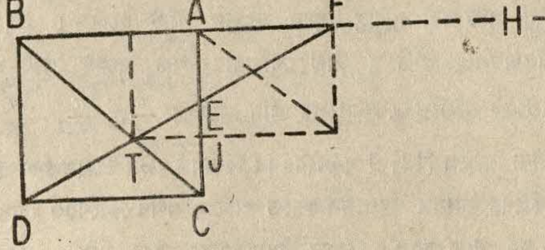
(2.27) এবং (2.28) হতে x অপনয়ন করে পাই

$$8 \sin^3 \theta - 4 \sin^2 \theta - 4 \sin \theta + 1 = 0 \qquad \ldots \quad (2.29)$$

(2.29) সমীকরণ এবং $\sin 3\theta = \cos 4\theta$ সমীকরণ একই প্রমাণিত হবে যদি শেষের সমীকরণকে $\sin \theta$-তে প্রকাশ করা যায়। এবং $(\sin \theta + 1)$ উৎপাদকটি অপসারিত করা হয়। সুতরাং এই সমীকরণের মূলগুলি $\frac{\pi}{14}$, $\frac{5\pi}{14}$, $\frac{9\pi}{14}$। 2.14 নং চিত্রের শীর্ষস্থ কোণের মান $\frac{\pi}{7}$। সমীকরণের অপর মূলগত কোণ অঙ্কন পাঠকদের হাতেই ছেড়ে দেওয়া গেল।

একটিমাত্র দাগের উপর নির্ভরশীল মাপনী ও কম্পাসের সাহায্যে অঙ্কনপ্রণালী আর্কিমিডিসের 'হারান নিউসিসের' প্রবাদে বিশ্বাস আনে। আর্কিমিডিস বৃত্তঃস্থ সমবাহু সপ্তভুজ অঙ্কনের উপর একটি পুস্তক প্রণয়ন করেছিলেন বলে বিশ্বাস করা হয়। 'নিউসিস' শব্দের অর্থ আসন্নমান। এক্ষেত্রে সুষম সপ্তভুজের আসন্ন অঙ্কনের উপর বইটি লিখিত হয়েছিল বলে মনে করা হয়। হীথ 'গ্রীক গণিতের সারকথা—ডোভারের প্রকাশনা' বইতে সুষম সপ্তভুজের আর্কিমিডিসকৃত অঙ্কনপ্রণালী লিখেছেন। কিন্তু কি করে সঠিক অঙ্কনপ্রণালীটি পাওয়া গেল সে সম্বন্ধে নীরব থেকেছেন।

হীথ শুধুমাত্র জ্যামিতিক যুক্তি দিয়ে সুষম সপ্তভুজের অঙ্কন প্রণালীর প্রমাণ দিয়েছেন (2.16 নং চিত্র দ্রষ্টব্য)। যখন EAF এবং DTC ত্রিভুজদ্বয়ের ক্ষেত্রফল সমান হয়, ভেদক DF, F বিন্দুতে সুষম সপ্তভুজের অনুপাত অনুভূমিক রেখায় সৃস্টি করে। 2.15 নং চিত্রে যে আসন্ন অঙ্কন দেওয়া হয়েছে তা দিয়ে সম্পূর্ণ সুষম সপ্তভুজ



2.16 নং চিত্র

অবশ্য সহজে আঁকা যাবে। A বিন্দুকে কেন্দ্র করে AX ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্তচাপ না এ'কে সম্পূর্ণ বৃত্ত আঁকলে AB, AC রেখা দুইটিতে ছেদগুলি সুষম সপ্তভুজের দুইটি শীর্ষবিন্দু দিবে। কাজেই সম্পূর্ণ সুষম সপ্তভুজ পাওয়া এখন খুবই সহজ। আর্কিমিডিস্ সুষম সপ্তভুজ এ'কেছেন এমটি ত্রিভুজের সাহায্যে BA বর্ধিতাংশে ছেদের অনুপাত নিয়ে (2.16 নং চিত্র দ্রষ্টব্য)। $ABDC$ বর্গক্ষেত্রের BA বাহু H পর্যন্ত বর্ধিত করতে বলে তিনি BC কর্ণ টানলেন। তারপর মাপনীটি D বিন্দুতে এক শীর্ষ স্থাপন করে অপরদিক F-এর উপর এমনভাবে স্থাপিত করতে হবে যে DTC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল AEF ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের সমান হয়। DF, BC-কে T বিন্দুতে, AC-কে E বিন্দুতে ও BA-কে F বিন্দুতে ছেদ করে। এরূপ অঙ্কনে $\angle BFD$ কোণকে যে $\frac{180°}{7}$ আসন্নমান দেয় তার প্রমাণ সামান্য আবশ্যক। ধরা যাক $BF = x_1$, $BD = 1$। তাহলে $AE = \frac{x_1 - 1}{x_1}$, $CJ = \frac{1}{1 + x_1}$। CJ, CTD ত্রিভুজের উচ্চতা। DTC ও AEF ত্রিভুজ দুটির ক্ষেত্রফল সমান হওয়ায়

$$\frac{(x_1 - 1)^2}{x_1} = \frac{1}{1 + x_1}$$

$$\text{অর্থাৎ} \quad x_1^3 - x_1^2 - 2x_1 + 1 = 0 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (2.30)$$

$\tan(\angle AFE) = \tan\theta = x_1$ । (2.30) সমীকরণের সমাধান $\tan\frac{\pi}{7}$ থেকে $4°$ এর বেশী পার্থক্য দেয় না। কাজেই আর্কিমিডিসের 'নিউসিস্' (2.30) সমীকরণে জ্যামিতিক সমাধান। এখন সমবাহু সপ্তভুজ, কিন্তু সুষম সমীকরণের জ্যামিতিক সমাধান। এখন সমবাহু সপ্তভুজ, কিন্তু সুষম নহে এরূপ চিত্রের অঙ্কনের উল্লেখ করব। (2.13), (2.13a) নং চিত্র দুইটি দেখলেই বুঝা যায় যে 1 : 2 : 3 অনুপাতের কোণ সৃষ্টিকারী সমবাহু অসুষম সপ্তভুজ সৃষ্টি হয়েছে। এরূপ বহুভুজ অনায়াসেই দিয়াশলাই কাঠি বা দাঁত খোঁচাবার কাঠি দিয়েই তৈরী হয়ে যায়। সমবাহু সপ্তভুজের অভঃস্থ কোণগুলির মান এক্ষেত্রে $\frac{\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}, \frac{5\pi}{7}$ । বিশদ আলোচনার জন্য ফিন্‌লে [12] ও জন্‌সনের [13] প্রবন্ধ দুটির উল্লেখ করা হল।

কোন কোণের আসন্ন বিভাজন করতে পারলে, অপর কোণেরও ঐরূপ বিভাজন তার সাহায্যে করা যেতে পারে। যেমন, উদাহরণরূপে দেওয়া যায়

$\frac{\theta}{5} = \frac{\theta}{6} + \frac{\theta}{30}$ যেহেতু $\frac{\theta}{p} = \frac{\theta}{p+1} + \frac{\theta}{p(p+1)}$ অথবা সামান্যীকরণে

$$\frac{\theta}{p} = \frac{\theta}{p+q} + \frac{q\theta}{p(p+q)} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2{\cdot}31)$$

(2·31) হতে আমরা লিখতে পারি যে

$$\frac{\theta}{5} = \frac{\theta}{6} + \frac{\theta}{32} + \frac{\theta}{32{\cdot}17} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2{\cdot}32)$$

কাজেই কোণের ত্রিখণ্ডিতকরণ যে কোন কোণকে যে কোন সংখ্যক সমান অংশে বিভাজনের দিকে বিরাট ধাপ মাপনী ও কম্পাসের সাহায্য মাত্র নিয়ে পাওয়া গেল। কোণ সমান তিন ভাগে ভাগ করার প্রণালীর বিবরণের জন্য কাণ্ডি ও রোলেট্ [14] উল্লেখযোগ্য। সেখানে কিছু যন্ত্রসাহায্যে অঙ্কন দেওয়া আছে।

1. "But the Judge said he never had summed before
So the Snark undertook it instead,
And summed it so well that it came to far more
Than the witnesses ever had said.

—Lewis Carroll.

2. ......axiomatisation is primarily an instrument of study and research for the advanced student and that it is quite out of place in elementary work when abstract character inevitably conduces to boredom and repulsion......

—G. Temple

প্রশ্নমালা :—

1. কেন্দ্রে $\frac{\pi}{10}$, $\frac{\pi}{14}$, $\frac{\pi}{9}$, $\frac{\pi}{18}$, $\frac{\pi}{16}$ কোণ উৎপন্নকারী বৃত্তকলায় সমান আঁকাবাঁকা পথ আঁক।

2. রিচমণ্ডের সুষম সপ্তদশভুজের অঙ্কণপ্রণালী ধরে নিয়ে একই বৃত্তে সুষম 51-ভুজ অঙ্কন কর।

3. n যদি 2 এর কোন ঘাত সংখ্যা না হয় প্রমাণ কর যে 2^n+1 যুগ্ম সংখ্যা।

4. একটি বর্গক্ষেত্রাকার কেক কি 9টি সমান টুকরা করা যায় যাতে সকলেই সমান পরিমাণ ধারের মাখন পায়? (সমাধানের ইঙ্গিত : সীমান্ত-মান প্রাপ্তির প্রণালী প্রয়োগ করতে হবে)।

5. প্রমাণ কর যে $2^{32}+1$, $5^{32}+1$ এবং $10^{16}+1$ এর প্রত্যেকের একটি উৎপাদক 641।

6. প্রমাণ কর যে যদি কোন বৃত্তস্থ বহুভুজ সমবাহু হয় তবে বহুভুজটি সুষম হবে, কিন্তু ইহার বিপরীত সত্য নহে।

7. যদি কোন বৃত্তস্থ বহুভুজ অঙ্কন করা হয় এবং ইহার শীর্ষবিন্দুগুলির সংখ্যা বিজোড় ও সবগুলি কোণ সমান হয়, প্রমাণ কর যে বহুভুজটি সুষম।

8. 5, 679, 431, 625 এর মৌলিক উৎপাদকগুলি লিখ।

9. সুষম পঞ্চভুজ গৃহের সঙ্গে মৌমাছির সম্পর্ক সুপরিচিত। যেহেতু একটি পুরুষ মৌমাছির গৃহে তার স্ত্রী, তার মা এবং তার স্ত্রীর পিতামাতা থাকে, n পুরুষ পূর্বে সাধারণ কর্মী মৌমাছির বংশ সংখ্যা দেওয়া হল,

$$\frac{2^{n+2}}{\sqrt{5}}\left(\cos^{n+2}36^\circ - \cos^{n+2}108^\circ\right)।$$

$n=10$ হলে সংখ্যাটি লিখ। সংখ্যাটি নিশ্চয়ই পূর্ণ সংখ্যা হবে।

10. $A_1, A_2, \ldots, A_5$ একটি সমতলীয় সুষম পঞ্চভুজ এবং A_rA_{r+1} একটি বৃত্তকে P_r, Q_r বিন্দুদ্বয়ে ছেদ করে। তবে প্রমাণ কর যে,

$$A_1P_1 \cdot A_1Q_1 \cdot A_2P_2 \cdot A_2Q_2 \cdots A_5P_5 \cdot A_5Q_5$$
$$= A_1Q_5 \cdot A_1P_5 \cdot A_5Q_4 \cdot A_5P_4 \cdots A_2Q_1 \cdot A_2P_1 ।$$

11. আঠারটি সর্বসম সমবাহু পঞ্চভুজ হতে একটি সুষম অষ্টাদশভূজ আঁক। [সমাধানের ইঙ্গিত : পঞ্চভুজগুলি এমনভাবে সাজাতে হবে যে এদের তিনটি বাহু রম্বসের তিনটি বাহু হয়।]

12. যদি $n \geqslant 4$ হয়, দেখাও যে $n\sqrt{3}\cos\theta-(n-4)\sin\theta=(n-4)\sqrt{3}$ সমীকরণ $\theta \sim \frac{2\pi}{n}$ সমাধান দেয়। যদি $n=11$ হয় দেখাও $\frac{2\pi}{11}$ এবং θ এর পার্থক্য 1·3% এর বেশী নহে। আরও দেখাও যে $\frac{2\pi}{11}$ কোণ অঙ্কন করা যেতে পারে যদি ABC সমবাহু ত্রিভুজের AB বাহুর উপর AB ব্যাসের বৃত্ত এঁকে বৃত্তের উপর P বিন্দু এমনভাবে নেওয়া যায় যাতে $\angle APO=\theta$ হয়।

13. $\frac{30^\circ}{2^n}<0{\cdot}06$ নির্দিষ্ট করে 26·8° কোণ ·06° থেকে বেশী ভুল না রেখে অঙ্কন কর।

গ্রন্থপঞ্জী :

1. হার্ডি, জি. এইচ্. এবং ই. এম্. রাইট্—An Introduction to theory of numbers দ্বিতীয় সংস্করণ, ক্ল্যারেণ্ডন্ প্রেস্, অক্সফোর্ড (1945).
2. উইলিয়াম্স্, কে. এস্.—[1] 46 (1962) পৃঃ 315-316।
3. কোক্সিটার, এইচ্. এস্, এম্.—Introduction to Geometry (ওয়াইলি) (1962)।
4. নেলসন্, ডি.—[1] 61 (1977) পৃঃ 215-216।
5. রিচ্মণ্ড্, এইচ্. ডব্লিউ.-কোয়ার্টার্লি জে, ম্যাথ্—26 (1893) পৃঃ 296-297।
6. বিশপ্, ডব্লিউ.—[2] 85 (1978) পৃঃ 186-188।
7. গাউস্, সি. এফ্—Disquisitions Arithematicae, Yale University Press, (1961)।
8. ফিন্লে, এ. এইচ্—[1] 43 (1959) পৃঃ 50-52।
9. স্টার্জেস্ পি, ডব্লিউ—[1] 46 (1962) পৃঃ 152-153।
10. ফাহ্মী, এন্.—[1] 49 (1965) পৃঃ 80-81।
11. খান, এম্. এন্—[1] 44 (1960) পৃঃ 112-114।
12. ফিন্লে, এ. এইচ্—[1] 43 (1959) পৃঃ 199।
13. জন্সন্, সি.—[1] 59 (1975) পৃঃ 17-21।
14. কাণ্ডি, এইচ্. এম্. ও এ. পি. রোলেট্,—Mathematical Models (অক্সফোর্ড) (1952), পৃঃ 208-211।

তৃতীয় পরিচ্ছেদ

ত্রিভুজের কতকগুলি বৈশিষ্ট্যপূর্ণ এবং দূরপ্রসারী কার্যকরী ক্ষমতাসম্পন্ন ও অন্যান্য দৃষ্টি আকর্ষণকারী উপপাদ্য।

1. বর্ণনার জন্য প্রথমে আমরা এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য বেছে নিলাম। উপপাদ্যে প্রমাণ হয়েছে যে ABC ত্রিভুজের যদি AX মধ্যমা হয় এবং X, BC এর উপর অবস্থিত বিন্দু হয়

$$AB^2 + AC^2 = 2AX^2 + 2BX^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad (3 \cdot 1)$$

ত্রিকোণমিতির সাহায্যে উপপাদ্যটি প্রমাণ করা সহজতম। কারণ,

$$\left.\begin{aligned} AB^2 &= AX^2 + BX^2 - 2BX \cdot AX \cos(\angle AXB) \\ AC^2 &= AX^2 + BX^2 - 2CX \cdot AX \cos(\angle AXC) \end{aligned}\right\} \quad (3 \cdot 2)$$

$\cos \angle AXB = -\cos \angle AXC, BX = CX$। সুতরাং $(3 \cdot 1)$ প্রমাণিত হল। বিকল্প প্রকাশভঙ্গি আমাদের পক্ষে সুবিধামত পদগুলি দিবে। A, B, C যদি তিনটি বিন্দু হয় এবং M, BC এর মধ্যবিন্দু হয়, তবে

$$AB^2 + AC^2 = BM^2 + CM^2 + 2AM^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad (3 \cdot 3)$$

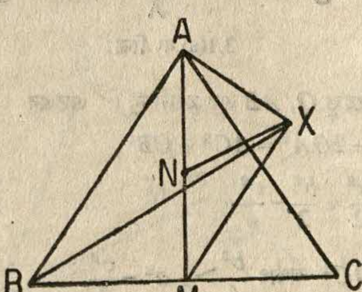
কিন্তু প্রশ্ন জাগে যে ইহার বিপরীত প্রতিজ্ঞা সত্য কিনা অর্থাৎ, যদি A, B, C তিনটি বিন্দু হয় এবং এবং $B \neq C$ এবং X, BC এর উপর এমন ভাবে অবস্থিত যাতে

$$AB^2 + BC^2 = BX^2 + CX^2 + 2AX^2,$$

তবে X হয় BC এর মধ্যবিন্দু কিংবা A হতে BC এর উপর লম্বপাদবিন্দু কি না। যদি X এর BC তে অবস্থান আবশ্যিক না করা হয় আমরা এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্যের সামান্যীকরণ করতে পারব। যদি A, B, C তিনটি বিন্দু হয়, M, BC এর মধ্যবিন্দু, N, AM এর মধ্য বিন্দু এবং X বিন্দু এমন ভাবে অবস্থিত যে

$$AB^2 + AC^2 = BX^2 + CX^2 + 2AX^2,$$

তবে $NX = NA$ অর্থাৎ X, AM ব্যাসের A, M বিন্দুগামী বৃত্তের উপর হবে। যেহেতু (3·1 নং চিত্র দ্রষ্টব্য।)



3.1 নং চিত্র

$$AB^2 + AC^2 = BX^2 + CX^2 + 2AX^2 = BM^2 + CM^2 + 2AM^2$$

অর্থাৎ $2(BM + MX^2) + 2AX^2 = 2BM^2 + 2AM^2$

বা $MX^2 + AX^2 = AM^2$ ।

অন্যথা যদি X, BC এর উপর A হতে লম্বপাদবিন্দু হয়,

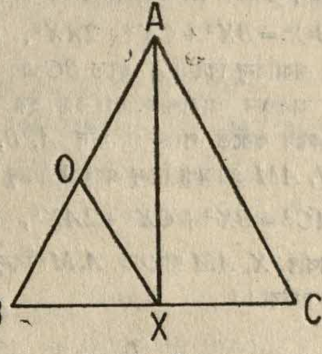
$$AB^2 + AC^2 = 2AX^2 + BX^2 + CX^2$$

এবং ইহাতে X, BC এর মধ্যবিন্দু হওয়ার দরকার পড়ে না। আরও একটি সম্ভাবনা আছে। সমকোণী ত্রিভুজ ABC এর $\angle C$ যদি সমকোণ হয়,

$$AB^2 + AC^2 = BX^2 + CX^2 + 2AX^2$$

সম্বন্ধটি $AB^2 = AC^2 + BC^2$ এ পরিণত হয়, অর্থাৎ X বিন্দু ও C বিন্দু একই বিন্দু হয়। আমরা এক্ষেত্রে বলতে পারি যে কোন রেখার একটি সীমাবিন্দুকে ঐ রেখার মধ্যবিন্দু বলে ধরে নেওয়া যায়।

আমরা ত্রিকোণমিতির সাহায্যে এ্যাপোলোনিয়াসের বিপরীত প্রতিজ্ঞার অনিশ্চিতির অবস্থাগুলি বিচার করব। $3\cdot1(a)$ নং চিত্র দ্রষ্টব্য। OX কে ABC ত্রিভুজের AC বাহুর সহিত সমান্তরাল করা হল। AX যথাপূর্ব মধ্যমা ও X, BC এর



3.1(a) নং চিত্র

মধ্যবিন্দু। অঙ্কনহেতু O, AB এর মধ্যবিন্দু। এতএব

$$2OC^2 + 2OA^2 = AC^2 + CB^2,$$

অর্থাৎ $OC^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$ ... ... (3·4)

ধরা যাক $OX^2 > OC^2$ অর্থাৎ $\frac{b^2}{4} > \frac{1}{2}a^2 - \frac{c^2}{4}$

বা, $c^2 > 2a^2 + b^2$ ... ... (3·5)

কিন্তু $c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot CD$, CD, C বিন্দু হতে A এর BC এর উপর লম্বপাদবিন্দুর দূরত্ব। কাজেই $OX^2 > OC^2$ অসমতাটি দাঁড়ায়

$$a^2 + b^2 - 2a \cdot CD > 2a^2 + b^2 \text{ অর্থাৎ } CD > \frac{a}{2} \quad \dots \quad (3\cdot6)$$

ত্রিকোণমিতি হতে পাওয়া যায়

$CD = b \cos (\pi - \overline{A+B})$। অতএব (3·6) হতে

$b \cos (A+B) > \frac{a}{2}$ অর্থাৎ, $2 \sin B \cos (A+B) > \sin A$

বা $\sin (A+2B) - \sin A > \sin A$

বা $\sin (A+2B) > 2 \sin A \quad \dots \quad \dots \quad (3\cdot7)$

যেহেতু (3·7) এর ডানদিক 1 হতে বড় হয়ে যায় যদি A, 30° হতে বড় হয় অর্থাৎ X এর একটি বিকল্প বিন্দু X' আছে যার জন্যও এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্যের মন্তব্য খাটবে। এ্যাপোলোনিয়ানের বিপরীত প্রতিজ্ঞা বিস্তারিত আলোচনার জন্য রিগবী [1], মে [2] এর প্রবন্ধ দুইটির উল্লেখ করা হল। জ্যামিতির নিয়ম তথা বিজ্ঞানের নিয়ম কোন সূত্র বা প্রতিজ্ঞার সামান্যীকরণ।

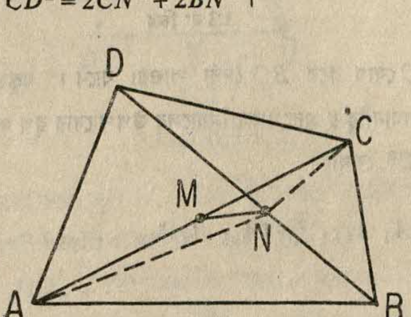
1.1 যদি $ABCD$ চতুর্ভুজের BD, AC কর্ণদ্বয় হয় এবং M ও N, AC ও BD এর যথাক্রমে মধ্যবিন্দুদ্বয় হয় তবে

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4MN^2 \quad (3\cdot8)$$

(3·2) নং চিত্র দ্রষ্টব্য। প্রমাণের জন্য AN, CN যুক্ত করি। অতএব পাই

$AB^2 + AD^2 = 2AN^2 + 2BN^2$,

$BC^2 + CD^2 = 2CN^2 + 2BN^2$।



3.2 নং চিত্র

উপরের দুইটি সম্বন্ধ যোগ করে পাই

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = 2(AN^2 + CN^2) + 4BN^2 \text{ ।}$$

এর ডান দিকের বিকল্প প্রকাশ

$$2(2AM^2 + 2MN^2) + 4BN^2$$

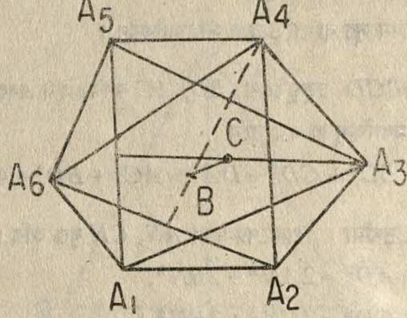
অর্থাৎ $BD^2 + AC^2 + 4MN^2$ ।

(3·1) ও (3·8) হতে অনুমান করা যায় যে যদি কোন ষড়ভুজে $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ এর $A_i(i=1,2,3,4,5,6)$ শীর্ষবিন্দুগুলি হয় তবে

$$(A_1A_2{}^2 + A_2A_3{}^2 + A_3A_4{}^2 + A_4A_5{}^2 + A_5A_6{}^2) + (A_1A_6{}^2)$$
$$-(A_1A_3{}^2 + A_2A_4{}^2 + A_3A_5{}^2 + A_4A_6{}^2) - A_2A_6{}^2$$
$$+(A_1A_4{}^2 + A_2A_5{}^2 + A_3A_6{}^2) + A_1A_5{}^2 = 9BC^2, \qquad (3·9)$$

BC, A_i শীর্ষবিন্দুগুলির অবস্থানের উপর নির্ভরশীল। ষড়ভুজের ক্ষেত্রে BC নিম্নরূপে পাওয়া যায় (3·3 নং চিত্র দ্রষ্টব্য) ঃ

B বিন্দু $A_2A_4A_6$ ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র এবং C বিন্দু $A_1A_3A_5$ ত্রিভুজের



3.3 নং চিত্র

ভরকেন্দ্র। B,C যোগ করে BC দৈর্ঘ্য পাওয়া যাবে। বস্তুতপক্ষে $2k$ সংখ্যক বাহুর বহুভুজের সামান্যীকৃত এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্যের রূপ দাঁড়ায়

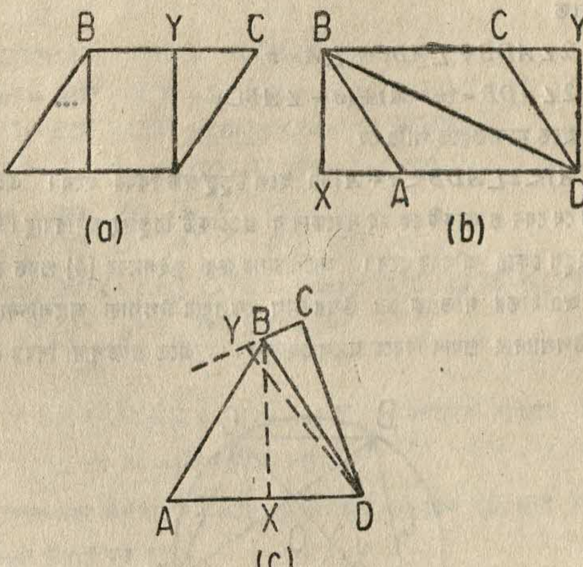
$S = k^2 \cdot BC^2$ যেখানে

$$S = \sum_{i=1}^{2k-1} (A_i A_{i+1})^2 + (A_{2k} A_1)^2$$
$$- \sum_{i=1}^{2k-2} (A_i A_{i+2})^2 - (A_{2k}A_2)^2$$

$$+(-1)^{k+1}\{(A_1A_{k+1})^2+\cdots+(A_kA_{2k})^2\} \quad \ldots \quad \ldots \quad (3\cdot 10)$$

BC রেখার দৈর্ঘ্য দুইটি নির্দিষ্ট চিত্রের অংশের ভরকেন্দ্র দুইটি যোগ করে পাওয়া যাবে। উদাহরণস্বরূপ অষ্টভুজের ক্ষেত্রে, দুই অংশচিত্র হবে দুইটি চতুর্ভুজ। বিশদ আলোচনার জন্য ডগলাসের [3] উল্লেখ করা হল।

এর পরে যে প্রশ্নের আলোচনা করব সেটি আগের প্রশ্নগুলির অনুরূপ। কারণ এতেও এ্যাপোলোনিয়াসের বিপরীত প্রতিজ্ঞার ন্যায় বিভিন্ন সম্ভাবনা আছে, অবশ্য সামান্যীকরণের কথা চিন্তা না করেই। $ABCD$ চতুর্ভুজের $\angle A=\angle C$ এবং AB বাহু $=CD$ বাহু, তাহলে কি চতুর্ভুজটি সামন্তরিক? প্রমাণ করতে গিয়ে BX, AY কে AD, BC এর উপর যথাক্রমে লম্ব টানা হল (3·4 (*a*), (*b*), (*c*) নং চিত্র দ্রষ্টব্য)।



3.4 (a), (b), (c) নং চিত্র

দুই প্রকার সম্ভাবনা আছে (*i*) X, Y উভয়েই ভিতরে পড়তে পারে বা বাইরে পড়তে পারে (*ii*) একটি ভিতরে ও অপরটি বাইরে পড়তে পারে। BD যোগ করা হল। (*a*), (*b*) চিত্রে ABX, CYD ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। অতএব $BX=DY$, $AX=CY$। কাজেই BXD, DYB ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। সুতরাং (*a*) এর ক্ষেত্রে $DX+AX=CY+YB$ এবং (*b*) এর ক্ষেত্রে $DX-AX=BY-CY$ অর্থাৎ উভয় ক্ষেত্রেই

$AD = BC$। $ABCD$ চতুর্ভুজ এক্ষেত্রে সামন্তরিক হবে। কিন্তু (*ii*) এর ক্ষেত্রে 3·4(*c*) চিত্রে ABX, CYD ত্রিভুজদ্বয়ের সর্বসমতা দেখা যায় না। বস্তুতঃ যদি BD যোগ করা যায়,

$$\frac{BD}{\sin C} = \frac{BD}{\sin A} = \frac{AB}{\sin ADB} = \frac{CD}{\sin CBD} \quad \cdots \quad (3{\cdot}11)$$

পাই। কাজেই হয় (*i*) $\angle ADB = \angle CBD$ বা (*ii*) $\angle ADB$, $\angle CBD$ এর সম্পূরক। প্রথম সম্ভাবনা চতুর্ভুজকে সামন্তরিক প্রতিপন্ন করে ও দ্বিতীয় সম্ভাবনা চতুর্ভুজকে সামন্তরিক প্রতিপন্ন করে না। আবার যদি

$\angle ADB + \angle CBD = \pi$, এবং ত্রিভুজের তিনটি কোণ একত্রে

$$\angle ADB + \angle ABD + \angle A = \pi \quad \cdots \quad (3{\cdot}12)$$

(3·12) হতে

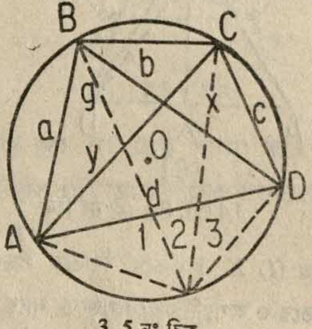
$$2\angle ADB + \angle ABC + \angle A = \pi$$

অর্থাৎ $2\angle ADB = (\pi - A) + (\pi - \angle ABC)$ ... (3·13)

(3·13) হতে মনে করতে পারি যে

$(\pi - A) < 2\angle ADB < \pi + A)$ না হলে চতুর্ভুজটি বিবর হবে। এই মন্তব্য এমন ভ্রান্ত যে যেন প্রত্যেকটি কোণই সমকোণ বা প্রত্যেকটি ত্রিভুজই সমদ্বিবাহু। কাজেই চতুর্ভুজ এরূপ ক্ষেত্রে অবিবর হবে। আলোচনার জন্য হুইলারের [4] প্রবন্ধ দ্রষ্টব্য।

2. জ্যামিতির গতিপ্রকৃতির উপর ছাপ ফেলবার উপপাদ্য আলোচনার পূর্বে টলেমির উপপাদ্যের প্রমাণ বিষয়ে আলোচনা করব। এতে প্রতিপাদ্য বিষয় এই যে



3.5 নং চিত্র

একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজে বিপরীত বাহুগুলির ক্ষেত্রফলের সমষ্টি কর্ণদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমান। এই সব উপপাদ্য বীজগণিত এবং ত্রিকোণমিতির ব্যবহার দেখবার জন্যই

আনা হয়েছে। 3·5 নং চিত্র দ্রষ্টব্য। E, বৃত্তের যে কোন বিন্দু ও AD এর এক পার্শ্বে B, C এর বিপরীতে অবস্থিত। $AB=a$, $BC=b$, $AD=d$, $CD=c$। ধরা যাক R বৃত্তের ব্যাসার্ধ। সুতরাং $\frac{x}{\sin A}=2R$ ইত্যাদি। অতএব

$$ac+bd=4R^2 \sin E_1 \sin E_3+4R^2 \sin E_2 \sin (E_1+E_2+E_3) \quad (3\cdot14)$$

যেহেতু $E_3=\angle CAD$, $\angle ABD=\pi-(E_1+E_2+E_3)$। (3·14) হতে

$$\begin{aligned}ac+bd&=2R^2 [(\cos (E_1-E_3)-\cos (E_1+E_3))+(\cos (E_1+E_3)-\\&\quad \cos (E_1+2E_2+E_3))]\\&=4R^2 \sin (E_1+E_2) \sin (E_2+E_3)\\&=2R \sin (E_1+E_2)\cdot 2R \sin (E_2+E_3)\\&=xy\end{aligned}$$

বিকল্প প্রমাণের জন্য পুনরায় 3·5 নং চিত্র দ্রষ্টব্য।

$$\left.\begin{aligned}a^2&=BO^2+AO^2-2AO\cdot BO \cos (\angle BOA),\\ b^2&=BO^2+CO^2-2BO\cdot CO \cos (\angle BOC)\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (3\cdot15$$

$BO=l$, $AO=\mu l$, $CO=\lambda l$, $DO=\lambda\mu l$, $CD=c=\lambda a$ ধরা যায়

কারণ $\frac{a}{c}=\frac{BO}{CO}=\frac{AO}{DO}=\frac{1}{\lambda}$, $\frac{b}{d}=\frac{CO}{DO}=\frac{BO}{AO}=\frac{1}{\mu}$ ... (3·16)

পুনরায় $\cos \angle BOA=\cos \angle COD=-\cos \angle BOC$। (3·15) ও (3·16) হতে

$$\frac{a^2-l^2-\mu^2 l^2}{2\mu l^2}=\frac{l^2+\lambda^2 l^2-b^2}{2\lambda l^2} \quad \ldots \quad (3\cdot17)$$

অর্থাৎ $\lambda a^2+\mu b^2=(\lambda+\mu)(1+\lambda\mu)\, l^2$। ভিন্নভাবে সাজিয়ে নিয়ে

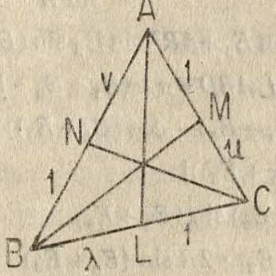
$$a\cdot\lambda a+b\cdot\mu b=(\lambda l+\mu l)(l+\lambda\mu l) \quad \ldots \quad (3\cdot18)$$

এবং ইহাই টলেমির উপপাদ্য। বিশদ আলোচনার জন্য তেল [5] এবং সিলিটোর [6] প্রবন্ধদ্বয় উল্লেখ করা হল।

3. এর পরে গুরুত্বপূর্ণ সেভার উপপাদ্য আলোচনা করব। নতুন জ্যামিতি প্রবর্তনে ইহার গুরুত্ব উল্লেখযোগ্য। অবশ্য বীজগণিত বেশী ব্যবহার না করে জ্যামিতি ব্যবহার করা হবে। সেভার উপপাদ্যের প্রতিপাদ্য বিষয় যে, ABC ত্রিভুজের বাহুগুলিকে যদি L, M, N বিন্দুত্রয়ে $\lambda:1$, $\mu:1$, $\nu:1$ অনুপাতগুলিতে ছেদ করা হয়, তবে AL, BM, CN সমবিন্দু হবে যদি $\lambda\mu\nu=1$ হয়।

(3·6) নং চিত্র দ্রষ্টব্য। ধরা যাক BC রেখার সমীকরণ $t_1=0$,

$CA : t_2=0$, ও $AB : t_3=0$ । t_1, t_2, t_3 যথাক্রমে $a_ix+b_iy+c_i$ $(i=1, 2, 3)$ ধারণা করা যায়। তবে AL, BM, CN রেখাগুলির সমীকরণ



3.6 নং চিত্র

যথাক্রমে $\lambda t_2=t_3$, $\mu t_3=t_1$, $\nu t_1=t_2$ । ... (3·19)

(3.19) যে সত্য তা বুঝা যায় যেহেতু যদি (x_1, y_1), AB রেখার উপর একটি বিন্দু হয় এবং (x_2, y_2), AC রেখাস্থিত বিন্দু হয়, $\left(\frac{\lambda x_2+x_1}{\lambda+1}, \frac{\lambda y_2+y_1}{\lambda+1}\right)$ বিন্দু $\lambda t_2=t_3$ সমীকরণের সমাধান হবে। (3.19) এর তিনটি সরলরেখা সমবিন্দু হবে যদি $\lambda\mu\nu=1$, কারণ সবগুলি সমীকরণ গুণনে একই বিন্দুর মান উভয় দিকে দিলে পাওয়া যাবে $\lambda\mu\nu=1$ ... (3·20)

3.1. উপরের উপপাদ্যের ভিন্নতর কিন্তু সমগোত্রীয় মেনেলাউসের উপপাদ্য। ইহার প্রতিপাদ্য বিষয়—যে কোন ত্রিভুজ ABC এর বাহুগুলিকে L, M, N বিন্দুত্রয়ে $\lambda : 1, \mu : 1$, $\nu : 1$ যথাক্রমে অনুপাতে যদি ভাগ করা হয়, তবে L, M, N সমরেখ হবে যদি $\lambda\mu\nu=-1$ ।

ধরা যাক ABC ত্রিভুজের বাহুগুলির সমীকরণ $t_1=0, t_2=0, t_3=0$ । কাজেই যে কোন সরলরেখার সমীকরণ ধরা যেতে পারে

$$T_1t_1+T_2t_2+T_3t_3=0 \qquad \ldots \qquad (3·21)$$

T_1, T_2, T_3 ধ্রুবসংখ্যাগুলি মাত্র। এই রেখা $t_1=0$ রেখার সঙ্গে যে বিন্দুতে ছেদ করবে সেই বিন্দু পাওয়া যাবে দুইটি সমীকরণ

$$t_1=0, T_2t_2+T_3t_3=0 \qquad \ldots \qquad (3·22)$$

থেকে। পুনরায় $\lambda t_3 = t_2$ সমীকরণের L বিন্দুর স্থানাঙ্ক সমাধান। কাজেই (3·22) হতে পাই

$$\frac{\lambda}{1}=\frac{t_2}{t_3}=-\frac{T_3}{T_2};$$

অনুরূপে

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mu}{1}&=\frac{t_3}{t_1}=-\frac{T_1}{T_3}\\ \frac{\nu}{1}&=\frac{t_1}{t_2}=-\frac{T_2}{T_1}\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (3.23)$$

(3·23) এর উভয় দিক গুণ করে পাই—

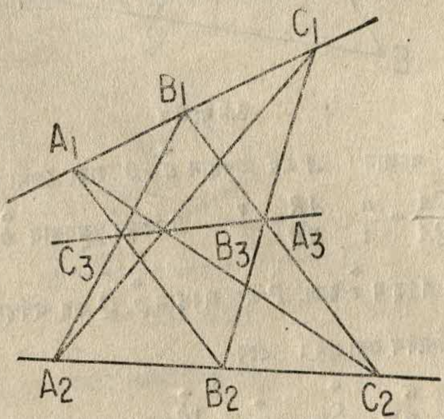
$$\lambda\mu\nu = -1 \quad \ldots \quad (3{\cdot}24)$$

বিস্তারিত আলোচনার জন্য কোক্সিটার [7] উল্লেখ করা হল।

3.2. আর একটি উপপাদ্য বিশেষ দৃষ্টি আকর্ষণ করেছিল তার প্রক্ষেপ জ্যামিতির সঙ্গে যোগ থাকায়। প্রক্ষেপ জ্যামিতিতে একটি নতুন জ্যামিতির সৃষ্টি হয়। তার কিছু উদাহরণ পরে দেওয়া যাবে। আপাততঃ আলোচ্য উপপাদ্যের নাম প্যাপ্পাসের উপপাদ্য। বস্তুতঃপক্ষে প্যাপ্পাসের উপপাদ্যের গুরুত্ব এত বেশী যে ইউক্লিডের দশটি স্বতঃসিদ্ধের বদলে আপতন উপপাদ্যগুলি ও প্যাপ্পাসের উপপাদ্যটি স্বতঃসিদ্ধ ধরলেই চলে। প্যাপ্পাসের উপপাদ্য নিম্নরূপ ঃ

যদি কোন ষড়ভুজের ছয়টি শীর্ষ একান্তরে দুইটি সরলরেখার উপর অবস্থিত হয় তবে ঐ ষড়ভুজের বিপরীত বাহুদের ছেদবিন্দুত্রয় সমরেখ।

এখন 3.7 নং চিত্র দ্রষ্টব্য। প্রমাণ করতে হবে যে A_3, B_3, C_3 সমরেখ। 3.7 নং চিত্রের বিকল্পও হতে পারে। কিন্তু প্রমাণ একইরূপ হবে। ধরা যাক



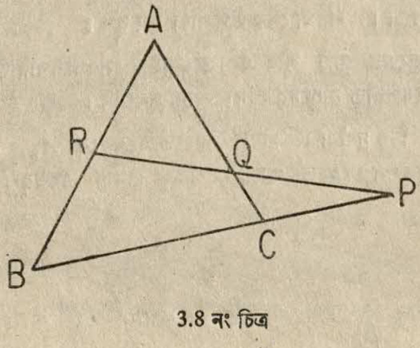
3.7 নং চিত্র

যে $A_1B_1C_1$ রেখার সমীকরণ $t_1=0$ এবং $A_2B_2C_2$ রেখার সমীকরণ $t_2=0$। A_1, B_1, C_1 বিন্দুত্রয় একই রেখায় অবস্থিত এবং উহাদের স্থানাঙ্কের মানগুলি t_1 এ বসালে ধরা যাক $\lambda_1 t_1, \mu_1 t_1, \nu_1 t_1$ হবে। অনুরূপ A_2, B_2, C_2 এর ক্ষেত্রে $\lambda_2 t_2, \mu_2 t_2, \nu_2 t_2$ হবে। যেহেতু A_3 বিন্দু, B_1C_2 রেখায় অবস্থিত এবং C_1B_2 তেও অবস্থিত

$$\left.\begin{aligned} &\mu_1 t_1-\nu_2 t_2=\nu_1 t_1-\mu_2 t_2 \\ &\text{অনুরূপ } B_3 \text{ এর ক্ষেত্রে} \\ &\lambda_1 t_1-\nu_2 t_2=\nu_1 t_1-\lambda_2 t_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (3.25)$$

(3.25) হতে বিয়োগ করে, $\lambda_1 t_1-\mu_2 t_2=\lambda_2 t_2-\mu_1 t_1$, অর্থাৎ C_3, A_3B_3 রেখার উপর অবস্থিত। বিশদ বিবরণেরজন্য কোক্সিটার [7] দ্রষ্টব্য।

3.2 এইসব প্রমাণ ভেক্টর বীজগণিত সাহায্যে অনেক সহজে হয়। ভেক্টর বীজগণিত বলবিদ্যায় বিস্তীর্ণ ভাবে প্রযুক্ত হয়। উদাহরণরূপে মেনেলাউসের উপপাদ্যের ভেক্টর বীজগণিতের সাহায্যে প্রমাণ দিব। 3.8 নং চিত্র দ্রষ্টব্য।



3.8 নং চিত্র

A কে মূলবিন্দু ধরলাম। A এর অবস্থান $\vec{a}=0$ দ্বারা লেখা যায়। ধরা যাক $\frac{BP}{PC}=\frac{\lambda}{1}$, $\frac{CA}{QA}=\frac{\mu}{1}$, $\frac{AR}{RB}=\frac{\nu}{1}$। B বিন্দুর অবস্থান $\vec{b}$ দ্বারা নির্দেশিত হল এবং C এর অবস্থান $\vec{c}$ দ্বারা, P এর অবস্থান $\vec{p}$, Q এর অবস্থান $\vec{q}$ এবং R এর অবস্থান $\vec{r}$ দ্বারা নির্দেশ করা হল। তবে

$$\vec{p}=\frac{\lambda\vec{c}+\vec{b}}{\lambda+1},\quad \vec{q}=\frac{\vec{c}}{\mu+1},\quad \vec{r}=\frac{\nu\vec{b}}{\nu+1} \quad \ldots \quad (3.26)$$

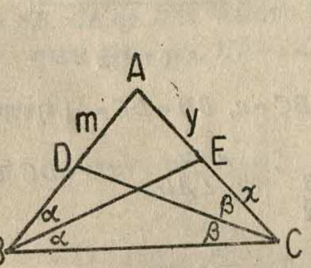
$\vec{p}$ কে $\vec{q}$ এবং $\vec{r}$ এ প্রকাশ করে

$\vec{p}=\left\{\lambda(\mu+1)\vec{q}+\frac{\nu+1}{\nu}\vec{r}\right\}\Big/(\lambda+1)$ । $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ সমরেখ হতে হলে তাদের সহগগুলির যোগফল শূন্য অর্থাৎ

$$\frac{\lambda(\mu+1)}{\lambda+1}+\frac{\nu+1}{\nu(\lambda+1)}=1 \text{ বা } \lambda\mu\nu=-1 \qquad \ldots \quad (3.26)$$

প্রণালীটি শক্তিশালী এবং সেভার উপপাদ্যের সামান্যীকরণ ইহার সাহায্যে করা যেতে পারে। বস্তুতঃ শীর্ষবিন্দু হতে বিপরীত বাহুর দিকে নির্দিষ্ট অনুপাতে অঙ্কিত রেখাগুলিকে সেভিয়ান বলা হয়। বিস্তারিত বিবরণের জন্য হান্টার [৪] উল্লেখ করা হল।

4. এর পরে যে প্রতিপাদ্য বিষয়ের অবতারণা করব তার গুরুত্ব যদিও বেশী নয়, কিন্তু ইহা খুব বেশী উৎসাহ জাগিয়েছিল। ইহাকে লেমাস্-স্টাইনার সম-দ্বিখণ্ডক উপপাদ্য বলে। ইহার প্রতিপাদ্য বিষয় এই যে যদি কোন ত্রিভুজের দুইটি কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় সমান দৈর্ঘ্যের হয়, তবে ত্রিভুজটি সমবাহু হবে। ইহার বিপরীত প্রতিজ্ঞা প্রমাণ খুবই সহজ। অনেক প্রমাণ দেওয়া হয়েছে, কোনটি ত্রিকোণমিতির সাহায্যে, কোনটি জ্যামিতিক অঙ্কনের সাহায্যে, আবার কোনটি আপতন সাহায্যে যাতে প্রণালীর উপর সন্দেহ আনে। এখানে প্রথমে ত্রিকোণমিতির সাহায্যে প্রমাণ দিয়ে পরে ইহার সামান্যীকরণের চেষ্টা করব। পরে জ্যামিতিক প্রমাণের কিছু উদাহরণ দিব। এখন 3.9 নং চিত্র দ্রষ্টব্য। $DC=BE$। ধরা যাক $BD=l$, $AD=m$,



3.9 নং চিত্র

$AE=y$, $EC=x$। অতএব ABC ত্রিভুজ হতে

$$\frac{l+m}{\sin 2\beta}=\frac{x+y}{\sin 2\alpha} \qquad \ldots \quad (3.28)$$

এবং DCB, BEC ত্রিভুজদ্বয় হতে

$$\frac{l \sin 2\alpha}{\sin \beta}=\frac{x \sin 2\beta}{\sin \alpha} \qquad \ldots \quad (3.29)$$

উভয় দিকই $DC=BE$ হওয়ার জন্য। পুনরায় ADC, AEB ত্রিভুজদ্বয় হতে

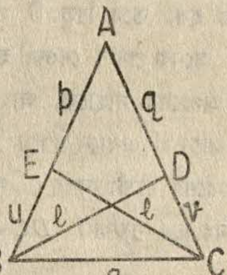
$$\frac{m}{\sin \beta}=\frac{y}{\sin \alpha}\,। \qquad \ldots \quad (3.30)$$

(3.28), (3.29) হতে l, m কে x, y এ লিখে

$$x\frac{\sin \beta}{\sin \alpha}+y\frac{\cos \alpha}{\cos \beta}=x+y \qquad \ldots \quad (3.31)$$

যদি $\alpha=\beta$ হয়, (3.31) এর বামদিক অবশ্যই ডানদিকের সমান হবে। যদি $\alpha<\beta$ হয়, বামদিক $\alpha<\pi/2$, $\beta<\pi/2$ এর জন্য ডানদিক অপেক্ষা বড় ; আর যদি $\alpha>\beta$, বামদিক ডানদিক হতে ছোট। কাজেই α, $\beta<\pi/2$ এর জন্য অবশ্যই $\alpha=\beta$ হবে। যে কোন ত্রিভুজের পক্ষেই α, $\beta<\pi/2$ খাটে ; কাজেই প্রমাণ সকল ক্ষেত্রেই প্রযোজ্য।

বিকল্প প্রমাণ দেওয়া গেল। 3.10 নং চিত্র দ্রষ্টব্য। $AE=p$, $BE=u$



3.10 নং চিত্র

$AD=q$, $DC=v$, $BC=a$, $BD=DC=l$। সুতরাং ABD ত্রিভুজ হতে

$$\left.\begin{aligned}&\frac{q}{\sin \frac{B}{2}}=\frac{p+u}{\sin \angle ADB} \quad \text{এবং } BDC \text{ ত্রিভুজ হতে}\\ &\frac{v}{\sin \frac{B}{2}}=\frac{a}{\sin \angle ADB}\,।\end{aligned}\right\} \ldots (3.32)$$

(3.32) হতে

$$\frac{a}{q+v}=\frac{u}{p} \text{ এবং অনুরূপে } \frac{a}{p+u}=\frac{v}{q} \qquad \ldots \quad (3.33)$$

আবার EBC এবং DBC ত্রিভুজ হতে ও (3.33) ব্যবহার করে

$$l^2 = a^2 - vq - \frac{auv}{p} + \frac{aq^2u}{pv} \quad \cdots \quad (3.34)$$

$$= a^2 - up - \frac{auv}{q} + \frac{ap^2v}{qu}$$

(3.34) হতে সরলীকৃত সম্বন্ধ পাই

$$a(p+u) - qv = a(q+v) - pu \text{ ।} \quad \ldots \quad (3.35)$$

(3.33) এবং (3.35) হতে

$$ap + au + pu = aq + av + qv$$

অর্থাৎ

$$qu + uv + au + pu = pv + uv + av + qv \text{ ।} \quad \text{সুতরাং}$$

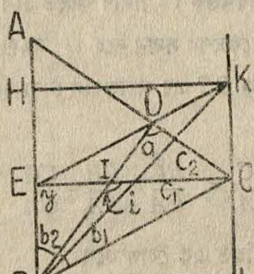
$$(u - v)(a + p + q) = 0 \quad \ldots \quad (3.36)$$

u কে v এর সমান না ধরে $a + p + q = 0$ ধরতে পারি না। কাজেই $u = v$ অর্থাৎ ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।

4.1 জ্যামিতির সাহায্যে প্রমাণের উপায় ও উহার দুইটি বিকল্প প্রণালী এখন উপস্থিত করব। 3.11 নং চিত্র দ্রষ্টব্য। ABC ত্রিভুজের BD, CE দুইটি সমান দৈর্ঘ্যের কোণ সমদ্বিখণ্ডক। EK অঙ্কিত হল যাতে $EK = BC$। $\angle DBC$ কোণ b_1 দ্বারা, $\angle DBE$ কোণ b_2 দ্বারা, $\angle BCE$ কোণ x দ্বারা, $\angle ECD$ কোণ c_2 দ্বারা নির্দেশিত হল। $\angle CEK$ কোণ b_3 দ্বারা নির্দেশিত হল এবং $\angle b_3 = \angle b_1 = \angle b_2$। আবার $\angle BCE = c_1$, $\angle BDC = d$, $\angle CIB = i$, $\angle BEC = y$। $b_1 = b_2 = b_3$, $c_1 = c_2$।

অতএব CBD, EKC ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। কাজেই $\angle BCK = \angle BEK$।

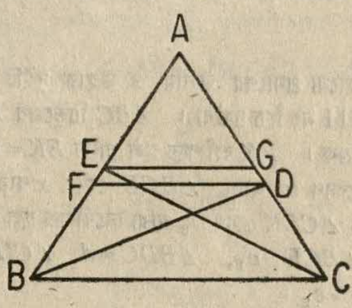
KH, BL যথাক্রমে AB, CK এর উপর লম্ব টানা হল। অতএব KEH, BCL ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। সুতরাং $HK = BL$, $HE = LC$। BK যোগ করা হল।



3.11 নং চিত্র

এখন BKH, BKL ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। কাজেই $HB=KL$ এবং BE, CK-এর সমান্তরাল। অর্থাৎ $BE=CK$ এবং EK, BC এর সমান্তরাল। সুতরাং $b_3=c_1$ বা $\angle B=\angle C$। অর্থাৎ ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

লেমাস্-স্টাইনার উপপাদ্যের নানারূপ পাওয়া যাবে লয়েড্ [9], পারগেটার [10], সিন্নাদুরাই [11], প্যারী [12] এবং আরও অনেকের প্রবন্ধে। বিশেষ করে শেষোক্তজন জে. স্টাইনার (1796-1867) এবং ডি.সি. লেমাসের (1780–1863) উপপাদ্যের প্রমাণের বিশদ গ্রন্থপঞ্জী দিয়েছেন। 1934 সনের [1] পত্রিকার 120 পৃষ্ঠায় এই উপপাদ্যের সুপাঠ্য ইতিহাস পাওয়া যাবে। অন্ততঃ চৌদ্দটি স্টাইনার-লেমাস্ উপপাদ্যের প্রমাণ আছে। কালে আরও যোগ হয়েছে। কাজেই অন্ততঃ আরও একটি জ্যামিতিক প্রমাণ দিয়ে স্টাইনার-লেমাস্ উপপাদ্যের সামান্যীকরণের দিকে যাব। নিম্নের প্রমাণের জন্য 3.12 নং চিত্র দ্রষ্টব্য।



3.12 নং চিত্র

ABC নির্দিষ্ট ত্রিভুজে $BD=CE$ দেওয়া আছে। BD, CE, ABC ত্রিভুজের $\angle B$ ও $\angle C$ কোণের সমদ্বিখণ্ডক। প্রমাণ করতে হবে যে $AB=AC$। ধরা যাক $\angle ABC$ কোণ $\angle ACB$ কোণের সমান নহে। অমরা ধরতে পারি $\angle ABC < \angle ACB$। DF, EG কে BC এর সমান্তরাল টানা হল। যেহেতু BD, $\angle ABC$ কোণের সমদ্বিখণ্ডক,

$$\frac{CD}{DA}=\frac{BC}{BA} < \frac{BC}{CA}=\frac{BE}{EA}=\frac{CG}{GA} \qquad \dots (3.37)$$

(3.37) এর উভয়দিকের সহিত এক যোগ করে

$$\frac{CD+DA}{DA} < \frac{CG+GA}{GA}$$

অর্থাৎ

$$AD > AG \quad। \qquad \ldots \quad (3.38)$$

AEG, AFD সদৃশ ত্রিভূজদ্বয় হতে পাই

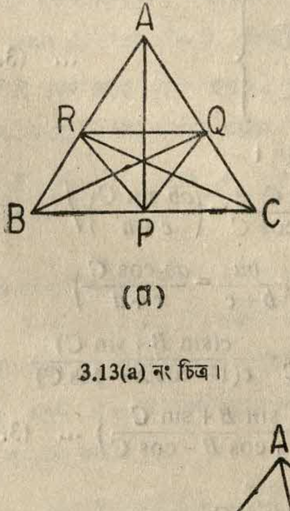
$$EG < FD \qquad \ldots \quad (3.39)$$

যেহেতু ধারণাবশতঃ $\angle GEC > \angle FBD$, GEC, FBD ত্রিভুজদ্বয় তুলনা করে

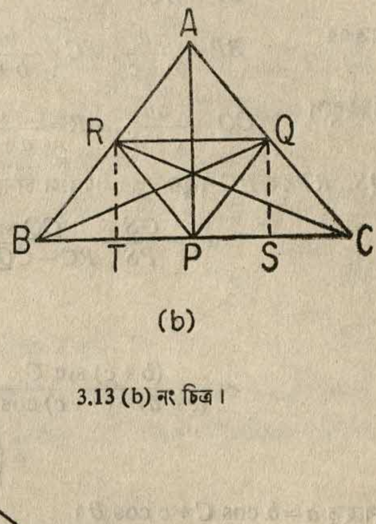
$$EG = GC > FD \quad। \qquad \ldots \quad (340)$$

(3.40) সম্বন্ধ (3.39) এর বিপরীতধর্মী যা অসম্ভব। কাজেই $\angle ABC = \angle ACB$ এবং তদনুসারে $AB = AC$।

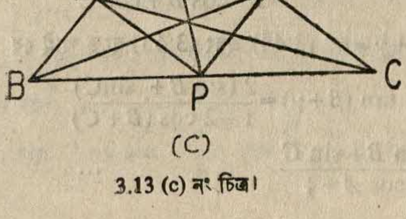
4.2 আমরা এখন স্টাইনার-লেমাস্ উপপাদ্যের ভিন্নতর সামান্যীকৃত রূপের আলোচনা করব। কৌতুহল উদ্দীপক ভিন্ন আকার নিম্নরূপে দেওয়া হল। ABC ত্রিভুজের শীর্ষকোণগুলির অন্তর্দ্বিখণ্ডকত্রয় বিপরীত বাহুগুলিকে P, Q, R বিন্দুতে ছেদ করে। যদি PQR ত্রিভুজ সমদ্বিবাহু হয়, তবে ABC ত্রিভুজ কি সমদ্বিবাহু হবে? 3.13 (*a*), (*b*), (*c*) নং চিত্রগুলি দ্রষ্টব্য।



3.13(a) নং চিত্র।



3.13 (b) নং চিত্র।



3.13 (c) নং চিত্র।

প্রথম দর্শনে প্রশ্নের উত্তর ইতিবাচক মনে হবে, বিশেষ করে যদি সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ এ'কে দেখি। কিন্তু যদি *ABC* ত্রিভুজকে স্থূলকোণী আঁকি একসময় দেখব যে *PQR* সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ হলেও *ABC* অবশ্যই সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ নহে (3.13(b) নং চিত্র)। কিন্তু স্থূলকোণটি বৃহত্তর হলে পুনরায় সমদ্বিবাহু হওয়ার ধর্ম ফিরে আসে (3.13 (*c*)নং চিত্র)। কাজেই হতবিহ্বল করবার প্রশ্ন জাগে যে কিরূপ অবস্থায় *PQR* সমদ্বিবাহু হতে পারে কিন্তু *ABC* ত্রিভুজ সমদ্বিবাহু না হয়ে বিষমবাহু হতে পারে ?

প্রমাণ করা যেতে পারে যে কোন ত্রিভুজ *ABC* এর *AP*, *BQ*, *CR* যদি অন্তর্দ্বিখণ্ডকগুলি হয়

$$\tan P = \frac{\sin B + \sin C}{\cos A + \frac{1}{2}} \quad \dots \quad (3.41)$$

কারণ ঃ ধরি $\angle BPR = \beta$, $\angle CPQ = \gamma$। *AP* অন্তর্দ্বিখণ্ডক হওয়াতে

$$\frac{BP}{CP} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b} \quad \dots \quad (3.42)$$

অতএব $BP = \dfrac{ca}{b+c}$, $PC = \dfrac{ba}{b+c}$

একইরূপে $CQ = \dfrac{ab}{c+a}$, $BR = \dfrac{ac}{a+b}$ ... (3.43)

QS, *RT* কে *BC* বাহুর উপর লম্বগুলি টানা হল।

$$\tan \gamma = \frac{QS}{PS} = \frac{CQ \sin C}{PC - CQ \cos C} = \left(\frac{ab \sin C}{c+a}\right) \bigg/ \left(\frac{ba}{b+c} - \frac{ab \cos C}{c+a}\right)$$

$$= \frac{(b+c) \sin C}{(c+a) - (b+c) \cos C} = \frac{c(\sin B + \sin C)}{c(1 + \cos B - \cos C)}$$

$$= \left(\frac{\sin B + \sin C}{1 + \cos B - \cos C}\right) \quad \dots \quad (3.44)$$

যেহেতু $a = b \cos C + c \cos B$।

$$\text{ঠিক একইরূপে } \tan \beta = \frac{\sin B + \sin C}{1 - \cos B + \cos C} \quad \dots \quad (3{\cdot}45)$$

যেহেতু $\angle P + \beta + \gamma = \pi$, (3·44) এবং (3·45) হতে পাই যে

$$\tan P = -\tan(\beta + \gamma) = \frac{2(\sin B + \sin C)}{1 - 2\cos(B + C)}$$

$$= \frac{\sin B + \sin C}{\cos A + \frac{1}{2}} \quad \dots \quad \dots \quad (3{\cdot}46)$$

অনুসিদ্ধান্তরূপে একটি কৌতূহলজনক বৈশিষ্ট্য লক্ষ্য করা যায়। যদি $\angle A=\frac{2\pi}{3}$ হয়, $\angle P=\frac{\pi}{2}$, B ও C-এর মান যাহাই হোক না কেন।

ধরা যাক PQR একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ ও P ইহার শীর্ষ। তবে $\tan Q=\tan R$ অর্থাৎ (3·41) হতে

$$\frac{\sin C+\sin A}{\cos B+\frac{1}{2}}=\frac{\sin A+\sin B}{\cos C+\frac{1}{2}}=\frac{\sin C-\sin B}{\cos B-\cos C} \text{ (ভাগক্রিয়া সাহায্যে)}$$

$$=\tan\frac{A}{2}, \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3·47)$$

যদি $\angle B$ কোণ $\angle C$ কোণের সমান না হয়। কাজেই PQR ত্রিভুজ সমদ্বিবাহু হলে ABC ত্রিভুজটিও সমদ্বিবাহু হবে বা $\angle Q=\angle R=\frac{A}{2}$ হবে। শেষোক্ত ক্ষেত্রে $AQPR$ চতুর্ভুজের একই বাহুর উপর দণ্ডায়মান কোণ দুইটি সমান অর্থাৎ $AQPR$ বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। অতএব

$$\tan A+\tan P=0 \text{ যেহেতু } A+P=\pi। \quad \ldots \quad (3·48)$$

$AQPR$ চতুর্ভুজকে বৃত্তস্থ হওয়ার জন্য ABC ত্রিভুজের $\angle A$ কোণের মানের পরিধি নির্ণয়ে (3·48) সাহায্য করবে। (3·41) এবং (3·48) হতে

$$\frac{\sin B+\sin C}{\cos A+\frac{1}{2}}=-\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\sin B+\sin C+\sin A}{\frac{1}{2}} \text{ যোগক্রিয়া সাহায্যে।}$$

$$\ldots \quad \ldots \quad (3·49)$$

শেষের সমানুপাত হতে পাই

$$2(\sin A+\sin B+\sin C)+\tan A=0 \quad \ldots \quad (350)$$

(3·50) সত্য হতে হলে $\tan A$ ঋণাত্মক হতে হবে অর্থাৎ $\angle A$-কে স্থূলকোণ হতে হবে। এখন A এর নির্দিষ্ট মানের জন্য $\angle B$ ও $\angle C$ পেতে হলে নীচের সমীকরণ দুটির সমাধান করতে হবে।

$$\left.\begin{aligned}&\sin B+\sin C=-\frac{\tan A}{2}-\sin A\\ &\text{এবং } \angle B+\angle C=\pi-A\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (3·51)$$

অবশ্য এই সমীকরণগুলির সম্ভব সমাধানের জন্য অতিরিক্ত দুটি সর্ত মানতে হবে। এই সর্তগুলি পাওয়া যাবে

$$\sin B+\sin C=2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}<2\sin\frac{B+C}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{অর্থাৎ}\quad \sin B+\sin C < 2\cos\frac{A}{2} \\ \text{আর দ্বিতীয়টি}\quad a<b+c \text{ বা } \sin A < \sin B+\sin C\text{।}\end{array}\right\}\quad \ldots\quad (3\cdot52)$$

(3·52) এর দুটি সর্ত একত্র করে

$$2\sin A < (\sin A+\sin B+\sin C) < \sin A+2\cos\frac{A}{2}$$

$$\text{অর্থাৎ}\quad 2\sin A < -\tfrac{1}{2}\tan A < \sin A+2\cos\frac{A}{2}\quad \ldots\quad (3\cdot53)$$

যেহেতু $\angle A$ স্থূলকোণ $-2\sin\frac{A}{2}\cos A/\sin\ A$ ধনাত্মক সংখ্যা। (3·53) কে এই ধনাত্মক সংখ্যা দিয়ে উভয় দিক গুণ করলে পাই

$$-4\sin\frac{A}{2}\cos A < \sin\frac{A}{2} < -2\cos A\left(\sin\frac{A}{2}+1\right)\quad \ldots\quad (3\cdot54)$$

(3·54) অসমতায় $\sin\frac{A}{2}=x$ বসালে পাওয়া যাবে

$$4x(2x^2-1) < x < 2(2x^2-1)(x+1)$$

অর্থাৎ

$$8x^3-5x < 0 \text{ এবং } 4x^3+4x^2-3x-2 > 0\quad \ldots\quad (3\cdot55)$$

অবশ্যই $0 < x < 1$। (3·55) এর যুগ্ম সমাধান

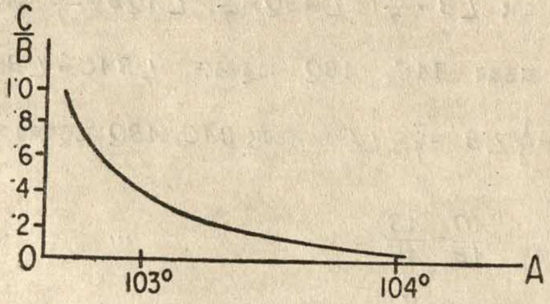
$$0{\cdot}78078 < x < 0{\cdot}79057$$

অর্থাৎ

$$102°40' < A < 104°28'\quad \ldots\quad \ldots\quad (3\cdot56)$$

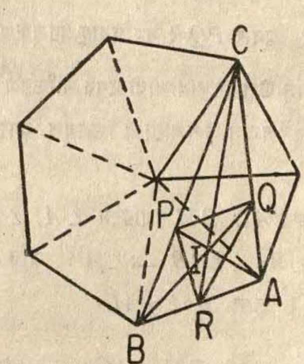
(3·56) অসমতাটি আশ্চর্য ধর্মটি দিয়েছে এবং প্রশ্নের বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের সমাধান এনেছে। $\angle A$ কোণের পরিধি মাত্র 2° এর মধ্যে আছে। এই সীমার মধ্যে, $\angle B$ এবং $\angle C$ কোণের সুনিশ্চিত অদ্বৈত সমাধান পাওয়া যাবে কারণ ত্রিভুজের কোণ তিনটির যোগফল ও তাদের সাইনের যোগফল দেওয়া আছে। যদি ধরে নেওয়া হয় যে $\angle C < \angle B$, আমরা $\frac{\angle C}{\angle B}$ এর অনুপাত $\angle A$ কোণের মানকে অপেক্ষমান করে বিন্দুস্থাপন (102°40′ হতে 104°28′ সীমার মধ্যে) করি তবে

লেখ হতে দেখবে যে ক্ষুদ্রতর সীমান্তের নিকট ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু হয় এবং বৃহত্তর সীমান্তের নিকট $\angle C$ কোণ বিলীয়মান হয় (3·14 নং চিত্র দ্রষ্টব্য)।



3·14 নং চিত্র

উপরের সীমান্তগুলি অসমতার সাহায্যে পাওয়া গিয়েছে। কিন্তু লক্ষ্য করবার বিষয় যে $\dfrac{\angle C}{\angle B}=1$ হলে $\angle A$ এর মান 102°40′ এর কাছাকাছি হয়। অন্যভাবে 102°40′ এর কাছাকাছি $\angle A$ কোণের মান নির্ণয় করব। $\dfrac{4\pi}{7}$ রেডিয়ান কোণের মান ডিগ্রী, মিনিট ও সেকেণ্ডে লিখলে পাই 102°51′26″। দেখাতে হবে যে $\angle A$ কোণের মান $\dfrac{4\pi}{7}$ হলে PQR সমদ্বিবাহু হলেও ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ হবে না। 3·15 নং চিত্র দ্রষ্টব্য। ধরা যাক ABC ত্রিভুজটি আবশ্যিকভাবে সমদ্বিবাহু নহে। ABC ত্রিভুজের কোণগুলির CR, AP, BQ অন্তর্দ্বিখণ্ডকত্রয়। PQR ত্রিভুজ, ABC সমদ্বিবাহু না হলেও, সমদ্বিবাহু হতে পারে। প্রথমে একটি সুষম সপ্তভুজ অঙ্কিত করি।



3·15 নং চিত্র

সুষম সপ্তভুজের শীর্ষকোণগুলি প্রত্যেকে $\frac{5\pi}{7}$। কাজেই 3·15 নং চিত্রের $\angle A=\frac{4\pi}{7}$, $\angle C=\frac{\pi}{7}$ এবং $\angle B=\frac{2\pi}{7}$। $\angle ABQ=\frac{\pi}{7}$, $\angle AQB=\frac{2\pi}{7}$ এবং $\angle BAC=\frac{4\pi}{7}$। অতএব BAC, ABQ ত্রিভুজদ্বয়ে, $\angle BAC=\angle BAQ=\frac{4\pi}{7}$, $\angle ABQ=\frac{1}{2}\angle B=\frac{\pi}{7}=\angle C$। সুতরাং BAC, ABQ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ। এবং সেইহেতু,

$$\frac{AQ}{AB}=\frac{AB}{AC} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (3\cdot57)$$

পুনরায় $\frac{BR}{BC}=\frac{\sin\frac{\pi}{14}}{\sin\frac{3\pi}{14}}=\frac{AI}{AC}$ অর্থাৎ,

$$\frac{BR}{AI}=\frac{BC}{AC} \text{ এবং অনুরূপে } \frac{AI}{AB}=\frac{AB}{BC} \qquad \ldots \qquad (3.58)$$

(3·58) হতে দুইটি সম্বন্ধের উভয়দিক গুণ করে পাই

$$\frac{BR}{AB}=\frac{AB}{AC} \qquad \ldots \qquad (3.59)$$

(3.59) এবং (3.57) হতে $AQ=BR$।

কাজেই PAQ, PBR ত্রিভুজদ্বয়ে $AQ=BR$, $\angle PAQ=\angle PBR=\frac{2\pi}{7}$, $PB=PA$ যেহেতু $\angle PAB=\angle PBA=\frac{2\pi}{7}$। অতএব PAQ, PBR ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম এবং $PQ=PR$ অর্থাৎ PQR সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ। $\angle A$ কোণ $\frac{4\pi}{7}$ হলে সামান্যীকৃত স্টাইনার-লেমাস্ উপপাদ্যের সাধারণের ব্যতিক্রম পাওয়া গেল।

4.3. এবার স্টাইনার লেমাস্ উপপাদ্যের ভিন্নরূপ আলোচনা করব। 3.16 নং চিত্র দ্রষ্টব্য।

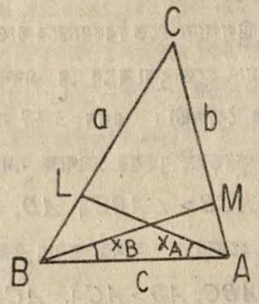
ABC নির্দিষ্ট ত্রিভুজের AL, BM যথাক্রমে $\angle A$, $\angle B$ কোণকে এরূপে বিভক্ত করে যে $\angle MBA=x\angle B$, $\angle LAB=x\angle A$। যদি $\angle A>\angle B$ হয় এবং

(i) যদি $0<x<1$ তবে $BM>AL$

(ii) যদি $-\frac{\angle B}{\angle A}<x<0$, $BM<AL$।

BCM এবং ABC ত্রিভুজ দুটি হতে

$$\frac{BM}{\sin C}=\frac{BC}{\sin CMB}=\frac{a}{\sin(A+xB)} \quad \ldots \quad (3.61)$$



3.16 নং চিত্র

অনুরূপভাবে

$$\frac{AL}{\sin C}=\frac{b}{\sin\ (B+xA)} \quad \ldots \quad (3.62)$$

কাজেই $$\frac{BM}{AL}=\frac{a}{b}\ \frac{\sin\ (B+xA)}{\sin\ (A+xB)}=\frac{\sin A \sin\ (B+xA)}{\sin B \sin\ (A+xB)} \quad \ldots \quad (3.63)$$

যদি $$\left.\begin{aligned} &F(x)=\sin A \sin\ (B+xA)-\sin\ B \sin\ (A+xB),\\ &F(0)=0,\ F(1)=\sin\ (A+B)\ (\sin\ A-\sin\ B)>0\\ &\frac{dF\ (x)}{dx}=A \sin A \cos(B+xA)-B \sin B \cos\ (A+xB) \end{aligned}\right\} \quad \ldots(3.64)$$

(3.64) হতে পাই যেহেতু $A \sin A > B \sin B$, $|\cos\ (B+xA)| < |\cos\ (Ax+B)|$ অর্থাৎ $\cos\ (B+xA)$ এর ধনাত্মক মান, $\cos\ (Ax+B)$ এর ধনাত্মক মান হতে ছোট হতে হবে যদি x এর 0, 1 এর মধ্যে ঘূর্ণন পথবিন্দু থাকতে হয়। ইহার সমার্থক হবে $|\sin\ (B+xA)| > |\sin\ (A+xB)|$ এবং ইহা সম্ভব নহে যেহেতু $0<x<1$। অতএব (3.63) হতে

$$\frac{BM}{AL}=1+\frac{F(x)}{\sin B \sin\ (A+xB)}>1 \quad \text{যখন } 0<x<1,$$

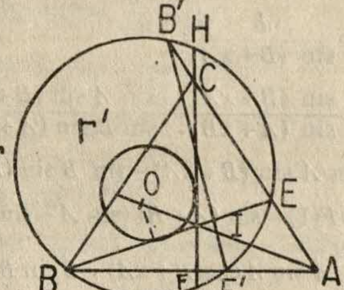
অর্থাৎ, $BM>AL$ যখন $0<x<1$।

যদি $x>1$, A, B এমন মানের নিতে পারি যে $B+xA \to \pi$, $A+xB<\pi$ এবং এক্ষেত্রে $BM<AL$। কাজেই যখন $x>1$, BM এবং AL এর মধ্যে কোন

সাধারণ অসমতা প্রকাশ সম্ভব নহে। ষ্টাইনার-লেমাস্ উপপাদ্যের সামান্যীকরণ বিশদতর জানতে হলে প্যারী [13], প্রিমরোজ [14], এবং ম্যাক্ [15] এর প্রবন্ধগুলির উল্লেখ করা হল।

4.4. ষ্টাইনার-লেমাস্ উপপাদ্য হতে বিষয়ান্তরে যাওয়ার পূর্বে আরও জ্যামিতিক প্রমাণ দেওয়া হবে। দুটি প্রমাণ হতে বুঝা যাবে যে এখনও বিকল্প প্রমাণ সম্ভব। ইহাই ইউক্লিডের জ্যামিতির বৈশিষ্ট্য। এখন 3.17 নং চিত্র দ্রষ্টব্য। যে কোন ত্রিভুজে দুইটি অন্তর্দ্বিখণ্ডকের ক্ষুদ্রতরটি বৃহত্তর কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। ধরা যাক ABC নির্দিষ্ট ত্রিভুজের $\angle ACB > \angle ABC$। AD, BE, CF অন্তর্দ্বিখণ্ডকত্রয় অন্তঃকেন্দ্র I বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। আমরা প্রমাণ করব যে $CF < BE$।

যেহেতু $\angle ACB > \angle ABC$, $AB > AC$। AC কে B' পর্যন্ত বর্ধিত করা হল এবং $AB' = AB$ করা হল। $B'I$ যোগ করা হল এবং AB কে E' বিন্দুতে



3.17 নং চিত্র

ছেদ করল। Γ বৃত্ত B, B', E, E' বিন্দুগুলি দিয়ে যায় এবং O ইহার কেন্দ্র। যেহেতু $AB = AB'$, $\angle BAC$ কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক AI, $B'E'$ এবং BE সমান দৈর্ঘ্যের কারণ উভয় রেখাই I বিন্দুগামী। Γ' বৃত্ত BE, BE' স্পর্শ করে এবং O ইহার কেন্দ্র। CIF রেখা Γ' বৃত্তের বাইরে অবস্থিত। CF রেখা Γ বৃত্তকে H, G বিন্দুদ্বয়ে ছেদ করে। Γ বৃত্তের GH জ্যা BE জ্যা হতে দূরে অবস্থিত। সুতরাং $BE < HG$ অর্থাৎ $CF < BE$। ইহা পূর্বসিদ্ধান্ত $BE = CF$ এর বিপরীতধর্মী। কাজেই ABC ত্রিভুজটিকে সমদ্বিবাহু হতে হবে।

উপরের প্রমাণপ্রণালীর অনুসিদ্ধান্ত হিসাবে নীচের সিদ্ধান্ত পাওয়া যায়ঃ

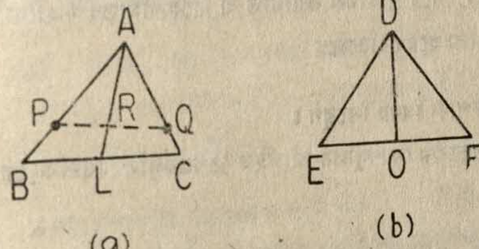
$AB = AC$ সম্বন্ধকে $BE = CF$ এর সূচক এবং বিপরীতার্থে $BE = CF$

সম্বন্ধকে $AB = AC$ এর সূচক বলা যায়। কিন্তু যদি BE, CF কে ABC ত্রিভুজে র পরিবৃত্তে Q, R পর্যন্ত বর্ধিত করা হয়, তবে

$AB = AC$ সম্বন্ধ $BQ = CR$ এর সূচক, কিন্তু

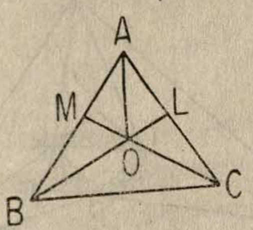
$BQ = CR$ সম্বন্ধ $AB = AC$ এর সূচক নহে।

4.5. ষ্টাইনার-লেমাস্ উপপাদ্যের সর্বশেষে বিকল্প প্রমাণ দেওয়া হল। যদি ABC, DEF ত্রিভুজদ্বয়ের $BC = EF$, অন্তর্দ্বিখণ্ডকদ্বয় $AL = DO$ এবং $\angle A = \angle D$ কোণদ্বয় হয়, তবে ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। সামান্যীকরণের অসুবিধা না রেখে



3.18 (*a*), (*b*) নং চিত্র

(3.18 (*a*), (*b*) নং চিত্রগুলি দ্রষ্টব্য) এবং $\angle C < \angle B$। AB, AC রেখাদ্বয়ের উপর DE, EF স্থাপিত করি এবং $\angle D = \angle A$ হওয়াতে $AP = DE$, $AQ = DF$ ধরে নেওয়া হল। $PQ = EF = BC$। কাজেই R বিন্দুতে যদি AL অন্তর্দ্বিখণ্ডক PQ কে ছেদ করে $AR = DO = AL$ অর্থাৎ DEF ত্রিভুজকে সমদ্বিবাহু মনে করি



3.19 নং চিত্র

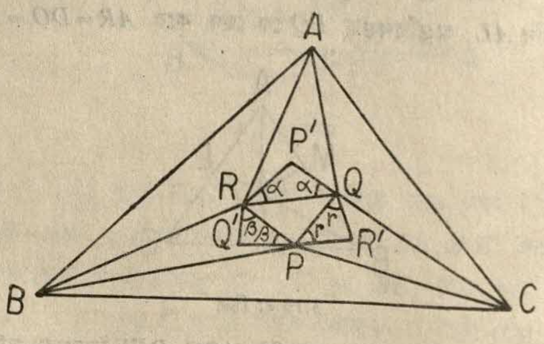
R, L এর উপর সমাপতিত হবে। কাজেই ABC, DEF ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। এখন 3.19 নং চিত্র দ্রষ্টব্য। BL, CM এর ছেদবিন্দু O। AO যোগ করা হল। ABL, ACM ত্রিভুজদ্বয়ের $\angle A$ সাধারণ, $BL = CM$, AO সাধারণ অন্তর্দ্বিখণ্ডক, অর্থাৎ $AB = AC$। ষ্টাইনার-লেমাস্ উপপাদ্যের প্রমাণের জন্য গিলিস্ **[16]**, চৌধুরী **[17]** এর নাম উল্লেখ করা হল।

5. আমরা এখন নতুন এবং কৌতুহলোদ্দীপক মর্লের উপপাদ্য এবং তার ব্যতিক্রম ও সামান্যীকরণ আলোচনা করব। মর্লের উপপাদ্য অপেক্ষাকৃত আধুনিক-কালের সৃষ্টি। জ্যামিতির অনেক উপপাদ্য নানা কৌশলে সৃষ্টি হয়েছে। যেগুলি তাদের মধ্যে সবচেয়ে কৌতুহলী করে সেগুলির মধ্যে একটি আবিষ্কার করেছেন এফ্. মর্লে 1899 খৃষ্টাব্দে। সামান্য বিবরণ কোক্সিটারের **[18]** পুস্তকে দ্রষ্টব্য। মর্লে, তাঁর বন্ধুদের মধ্যে তাঁর আবিষ্কারের কথা লিখলে তাঁরা পৃথিবীতে গণিতের আলোচনার মাধ্যমে ছড়িয়ে দেন। অবশেষে পনের বৎসর পরে একটি সরল সহজ প্রমাণ ছাপার অক্ষরে বার হল। পরে প্রাথমিক জ্যামিতি বা ত্রিকোণমিতির সাহায্যে এই উপপাদ্যের অনেক প্রমাণ ছাপা হয়ে বেরিয়েছে।

উপপাদ্যের প্রতিপাদ্য বিষয় নিম্নরূপ ঃ

যে-কোন ত্রিভুজের কোণগুলির সন্নিহিত ত্রিখণ্ডকগুলির ছেদবিন্দুত্রয় সমবাহু ত্রিভুজ উৎপন্ন করে।

উপপাদ্যটির যে কোন কোণকে ত্রিখণ্ডিতকরণের সঙ্গে যোগ থাকাতে মাপনী ও কম্পাসের সাহায্যে চিত্রটি অঙ্কন সম্ভবপর নয়। কাজেই প্রশ্নের জ্যামিতিক সমাধান বিষয়ে মনে সকলেরই সন্দেহ জেগেছিল। সরাসরি প্রমাণের দিকে না গিয়ে আমরা উল্টাদিক দিয়ে প্রমাণের চেষ্টা করব। 3.20 নং চিত্র দ্রষ্টব্য। যে-কোন ত্রিভুজ *ABC*,



3.20 নং চিত্র

সমবাহু ত্রিভুজ *PQR* উৎপন্ন করে যখন *A, B, C* কোণ তিনটি *AQ* এবং *AR*, *BR* এবং *BP*, *CP* এবং *CQ* রেখাগুলি দ্বারা যথাক্রমে ত্রিখণ্ডিত হয়। *PQ, RQ*, *PR* বাহু তিনটির উপর তিনটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত হল যথাক্রমে *PR'Q*,

$QP'R$ ও $PQ'R$। এই ত্রিভুজগুলির ভূমিসংলগ্ন কোণগুলি α, β, γ নিম্নলিখিত সমীকরণ ও অসমতাগুলির সমাধান ঃ

$$\alpha+\beta+\gamma=120^\circ, \alpha<60^\circ, \beta<60^\circ, \gamma<60^\circ \quad \cdots \quad (3.65)$$

ধরা যাক, সমদ্বিবাহু ত্রিভুজগুলির ভূমিপার্শ্বস্থ বাহুগুলিকে ভূমি ছাড়িয়ে বর্ধিত করা হল যাতে ঐ বাহুগুলি পুনরায় যথাক্রমে A, B, C বিন্দুতে মিলিত হয়। যেহেতু $\alpha+\beta+\gamma+60^\circ=180^\circ$, আমরা অন্যান্য কোণগুলির মান বিষয়ে অনুমান করতে পারি। 3.20 নং চিত্রে দেখলে পাওয়া যাবে AQR ত্রিভুজে A শীর্ষস্থ কোণের মান

$$\begin{aligned} &180^\circ-\{180^\circ-\overline{60+\gamma}+180^\circ-\overline{60^\circ+\beta}\} \\ &=120^\circ+\beta+\gamma-180^\circ=\beta+\gamma-60^\circ=(\alpha+\beta+\gamma)-60^\circ-\alpha \\ &=120^\circ-60^\circ-\alpha=60^\circ-\alpha \end{aligned} \quad \cdots \quad (3.66)$$

$\angle AQR$. $\angle ARQ$ কোণগুলি যথাক্রমে $\alpha+\beta, \alpha+\gamma$। $P'BC$ ত্রিভুজের PP' রেখা P' শীর্ষস্থ কোণকে অন্তর্দ্বিখণ্ডিত করে এবং অর্ধাংশের মান $90^\circ-\alpha$। $\angle BPC$ কোণের মান

$$180^\circ-(60^\circ-\beta+60^\circ-\gamma)=60^\circ+\beta+\gamma=180^\circ-\alpha \quad \cdots \quad (3.67)$$

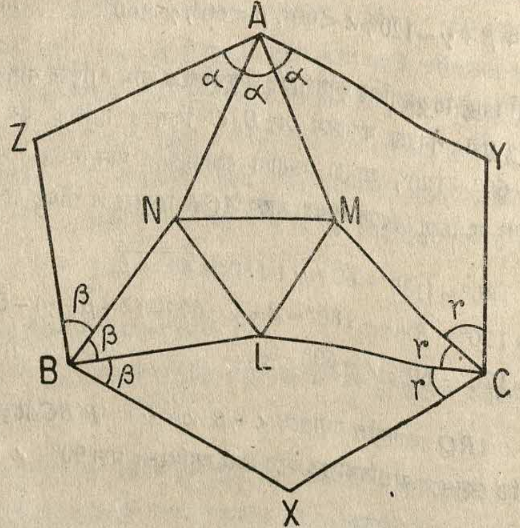
কাজেই P বিন্দু $P'BC$ ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র। একইরূপে Q বিন্দু $Q'CA$ ত্রিভুজের এবং R বিন্দু $R'AB$ ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র। কাজেই A বিন্দুতে তিনটি ক্ষুদ্র কোণই $\frac{A}{3}=60^\circ-\alpha$। B ও C বিন্দুতেও একই রূপ। কাজেই

$$\alpha=60^\circ-\frac{A}{3}, \quad \beta=60^\circ-\frac{B}{3}, \quad \gamma=60^\circ-\frac{C}{3}।$$

সমদ্বিবাহু ত্রিভুজগুলির ভূমিসংলগ্ন কোণগুলির মান উপরের মানগুলি নিলে সমদ্বিবাহু ত্রিভুজগুলির বাহুগুলির বর্ধিতাংশ A, B, C বিন্দুগুলি দিয়ে যাবে। উপরের ধরণের প্রমাণের জন্য কোক্সিটার [18], ভেঙ্কটাচালিয়েঙ্গারের [19] লেখার উল্লেখ করা হল।

5.1 আমরা উপরের প্রমাণের নীচে বিকল্প দিলাম। যদি ABC ত্রিভুজের ছয়টি অন্তঃত্রিখণ্ডক আঁকা যায় এবং ত্রিখণ্ডকের প্রত্যেকটি জোড়া যেগুলি ত্রিভুজের একটি বাহুর সন্নিহিত L, M, N বিন্দু তিনটিতে মিলিত হয়, তবে প্রমাণ করতে হবে যে LMN সমবাহু। ধরা যাক ABC ত্রিভুজের $\angle A=3\alpha$, $\angle B=3\beta$, $\angle C=3\gamma$।

প্রথমে LMN ত্রিভুজকে সমবাহু ধরে নিলাম (3.21 নং চিত্র দ্রষ্টব্য)। আমরা AMN BNL, CLM ত্রিভুজ আঁকলাম যাদের ভূমিসংলগ্ন কোণগুলির θ অংশ স্বেচ্ছাধীন,



3.21 নং চিত্র

কিন্তু আঁকবার পূর্বে স্থির করা আছে এবং $\angle MAN = \alpha$, $\angle NBL = \beta$, $\angle LCM = \gamma$। ধরা যাক—

$$\left.\begin{aligned}
&\angle AMN = \frac{\pi}{3} + \gamma + \theta,\ \angle ANM = \frac{\pi}{3} + \beta - \theta,\ \angle BNL = \frac{\pi}{3} + \alpha + \theta,\\
&\angle BLN = \frac{\pi}{3} + \gamma - \theta,\ \angle CLM = \frac{\pi}{3} + \beta + \theta,\ \angle CML = \frac{\pi}{3} + \alpha - \theta\\
&\text{অতএব সুস্পষ্টতঃ}\\
&\angle MAN = \pi - \left(\frac{\pi}{3} + \beta - \theta\right) - \left(\frac{\pi}{3} + \gamma + \theta\right) = \alpha \text{ যেহেতু } \alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{3},\\
&\angle BLC = 2\pi - \left(\frac{\pi}{3} + \beta + \theta\right) - \left(\frac{\pi}{3} + \gamma - \theta\right) - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + \alpha
\end{aligned}\right\} \quad \cdots (3.68)$$

3.21 নং চিত্রের ন্যায় ছবি অঙ্কিত হলে পর

$$\angle MAY = \angle NAZ = \alpha,\ \angle MCY = \angle LCX = \gamma,$$
$$\angle LBX = \angle ZBN = \beta \quad \cdots (3.69)$$

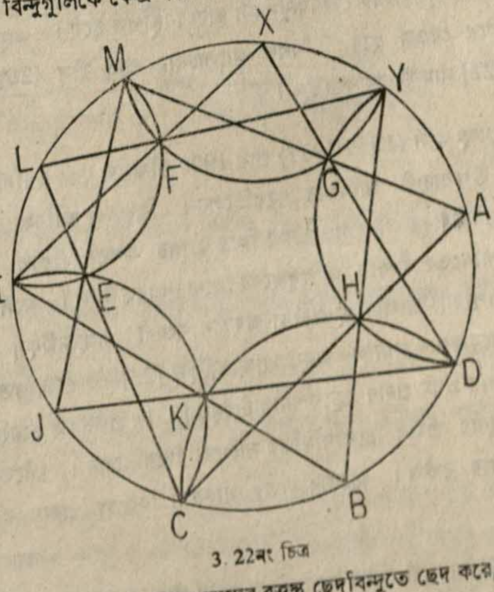
AZ, BZ রেখাদ্বয় Z বিন্দুতে, AY, CY রেখাদ্বয় Y বিন্দুতে এবং BX, CX রেখা দুইটি X বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। ফলতঃ (3.68) ও (3.69) হতে পাই

$$\angle BXC = 2\pi - \left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right) - \beta - \gamma = \pi \qquad \ldots \quad (3.70)$$

কাজেই যদি চিত্রটিকে সূক্ষ্মভাবে এবং নির্ভুলভাবে অঙ্কিত করি তবে দেখা যাবে যে B, X, C সমরেখ এবং একইরূপে C, Y, A সমরেখ এবং A, Z, B অনুরূপ সমরেখ। স্বভাবতঃই যদি LMN ত্রিভুজ ABC ত্রিভুজ হতে অঙ্কন সুরু করা যেত, $\angle\theta$ কোণ স্থির হয়ে যেত ও স্বেচ্ছাধীন থাকত না। এ প্রমাণটি নিশ্চয়ই কোক্সিটারের [18] নির্বাচিত প্রমাণ অপেক্ষা সহজে বোধগম্য।

5.2 উপরের উপপাদ্যের যে ধারায় প্রমাণ দেওয়া হল তাতে জ্যামিতি একটি বিশিষ্ট প্রমাণের ধারা ও নতুন নতুন উপপাদ্য সৃষ্টির দিকে দৃষ্টি আকর্ষণ করে। এই ধারাকে আমরা বিপরীতমুখী প্রমাণের ধারা বলব। ধারাটির ব্যবহারে অভ্যস্ত হওয়ার জন্য অন্য একটি দৃষ্টান্ত উপস্থিত করা দরকার।

যে কোন বৃত্তের উপর পাঁচটি বিন্দু $A, B, \ldots$ ইত্যাদি নেওয়া হল (3.22 নং চিত্র দ্রষ্টব্য)। এই বিন্দুগুলিকে কেন্দ্র করে পাঁচটি বৃত্তচাপ অঙ্কিত হল এবং প্রত্যেকটি



3.22নং চিত্র

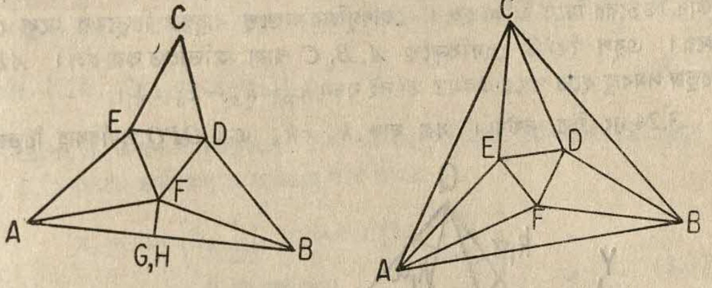
বৃত্তচাপ তার দুই প্রতিবেশী বৃত্তকে তাদের বৃত্তস্থ ছেদবিন্দুতে ছেদ করে, যথা Y, D, C … ইত্যাদি বিন্দুগুলিতে। তবে ঐ বৃত্তগুলির অপর ছেদবিন্দুগুলি H, G, F, E, K

দিয়ে একটি বৃত্তস্থ পঞ্চশীর্ষ নক্ষত্র অঙ্কন সম্ভব অর্থাৎ GX. JK বৃত্তের উপর D-তে মিলিত হয় ইত্যাদি। প্রথমে লক্ষণীয় যে YG-এর লম্বদ্বিখণ্ডক AX। সুতরাং $\angle AXY = \angle AXG$। পুনরায় মূল বৃত্তের YA, DA জ্যাগুলি সমান। কাজেই $\angle AXY = \angle AXD$। অতএব $\angle AXG = \angle AXD$ অর্থাৎ XG, XD একই সরলরেখা। X, G, D সমরেখ। অনুরূপে YH, IK অপর একটি বৃত্তের কেন্দ্রে মিলিত হয়। মিলনবিন্দু অবশ্যই মূল বৃত্তের উপর অবস্থিত। অনুরূপ জোড়া YF, EC এবং DK, EJ বা XFI, XGD ইত্যাদি। LY কে MYI কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক মনে করা যেতে পারে। ইহার প্রতিবেশী MCI এর অন্তর্দ্বিখণ্ডক LC। অনুরূপ JD রেখা $\angle CDI$ কোণের এবং JM রেখা $\angle CMI$ কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক। মর্লে'র উপপাদ্যের সঙ্গে সাদৃশ্য দেখান দরকার। ত্রিভুজের পরিবর্তে একটি বৃত্তস্থ পঞ্চভুজ আঁকা হল। তিনটি প্রতিবেশী শীর্ষ নেওয়া হল এবং একটি ত্রিভুজ আঁকা হল। ত্রিভুজটির বৃত্তস্থ সীমান্তের শীর্ষ কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক অঙ্কন করা হল। অনুরূপভাবে ক্রমান্বয়ে পাঁচটি শীর্ষকেই একে একে নিয়ে এরূপ অন্তর্দ্বিখণ্ডক আঁকা হল। স্বাভাবিক কারণেই ${}^5C_3 = 10$টি অন্তর্দ্বিখণ্ডক পাওয়া যাবে। পঞ্চভুজের বাহুগুলি এবং অন্তর্দ্বিখণ্ডকগুলি পাঁচটি বৃত্তমালার ছেদবিন্দুসকল দ্বারা নিরূপিত হবে। এরূপ আরও কিছু উপপাদ্য পরে দেওয়া হবে। বিশদ আলোচনার জন্য রীস্ **[20]** জন্‌সন্ **[21]**, ফোর্ডারের **[22]** নাম উল্লেখ করা হল।

5.2 ফ্রাঙ্ক্ মর্লে (1860-1937) প্রায় 1900 খ্রীষ্টাব্দে তাঁর জ্যামিতির গবেষণায় বৈশিষ্ট্যপূর্ণ উপপাদ্যটি আবিষ্কার করেছিলেন। কিন্তু ঐ আবিষ্কারের কথা তখন তিনি তাঁর বন্ধুবান্ধবদের জানালেও প্রমাণ দিয়ে ছাপার অক্ষরে প্রকাশ করেন নাই। খবরটি শুধু গণিতের বিষয়ে গল্পগুজবের মধ্যে আবদ্ধ ছিল। মর্লে 1924 সনে প্রমাণ সহ উপপাদ্যটি জাপানীজ্ জার্নাল অব্ সেকেণ্ডারী ম্যাথ্‌মেটিক্‌স্-এ ছাপান। তাঁর প্রমাণ আমেরিকান জার্নাল অব্ ম্যাথ্‌মেটিক্‌স্ **[23]** এও প্রকাশিত হয়েছিল। অবশ্য উপপাদ্যের প্রথম প্রমাণ এডুকেশনাল টাইম্‌স্ **[23]**এ প্রকাশিত হয়েছিল। কে **[24]** একটি সুন্দর প্রমাণ ত্রিকোণমিতির সাহায্যে দিয়েছিলেন। ক্লীভেনের **[25]** প্রবন্ধও এ বিষয়ে দ্রষ্টব্য। ত্রিকোণমিতির সাহায্যে বিকল্প প্রমাণ রীড্ **[26]** দিয়েছেন।

ত্রিকোণমিতির সাহায্যে প্রমাণ অনেকটা সরাসরি হবে। 3.23 নং চিত্র দ্রষ্টব্য। প্রমাণ করতে হবে যে EFD ত্রিভুজ সমবাহু যদি $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$

হয় তবে $\angle BFD = \angle CED = 60° + \frac{\alpha}{3}$, $\angle AFE = \angle CDE = 60° + \frac{\beta}{3}$



2.33 নং চিত্র

$\angle AEF = \angle BDF = 60° + \frac{\gamma}{3}$। আমরা বিপরীত দিক হতে অগ্রসর হব। ধরা যাক DEF একটি সমবাহু ত্রিভুজ। $\angle AEF = 60° + \frac{\gamma}{3}$, $\angle ECF = \frac{\alpha}{3}$, $\angle DBF = \frac{\beta}{3}$, $\angle BDF = 60° + \frac{\gamma}{3}$ আঁকা হল। অতএব AEF, DBF ত্রিভুজ দুটি হতে

$$\frac{AF}{\sin\left(60° + \frac{\gamma}{3}\right)} = \frac{EF}{\sin\frac{\alpha}{3}} \text{ এবং } \frac{DF}{\sin\frac{\beta}{3}} = \frac{BF}{\sin\left(60° + \frac{\gamma}{3}\right)} \quad \ldots \quad (3.71)$$

(3.71) হতে

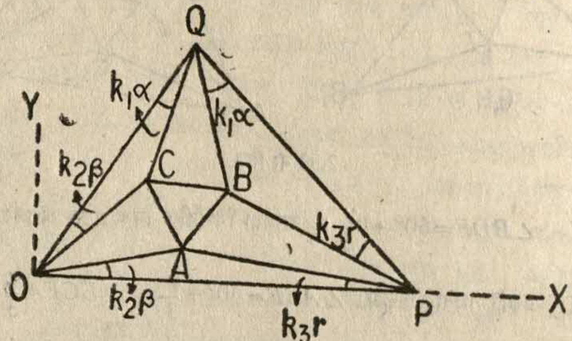
$$EF \sin\left(60° + \frac{\gamma}{3}\right) = DF \sin\left(60° + \frac{\gamma}{3}\right) = AF \sin\frac{\alpha}{3} = BF \sin\frac{\beta}{3}।$$

$AF\sin\frac{\alpha}{3} = BF\sin\frac{\beta}{3}$ সম্বন্ধটি প্রমাণ করে যে যদি কোন রেখা AG, FA-এর সঙ্গে A বিন্দুতে $\frac{\alpha}{3}$ কোণ আঁকা হয় এবং BF এর সঙ্গে B বিন্দুতে $\frac{\beta}{3}$ কোণ করে BH আঁকা হয়, AG এবং BH একই রেখায় অবস্থিত হবে। অতএব মর্লের উপপাদ্য প্রমাণিত হল।

5.3 মার্লের অনবদ্য উপপাদ্য স্বভাবতঃই প্রকারভেদ আনবে এবং সামান্যীকরণ করার প্রচেষ্টা আকর্ষণ করবে। নীচের বিশ্লেষণ হতে বুঝতে পারা যাবে যে ত্রিভুজের শীর্ষকোণগুলি অন্য কোনরূপ ভাগ করলে মর্লের উপপাদ্যের প্রমাণিত বিষয়বস্তুর প্রকারভেদ পাওয়া যায় না।

উপপাদ্য : k_1, k_2, k_3 কে $[0, \frac{1}{2}]$এর মধ্যে নেওয়া হল। OPQ ত্রিভুজের প্রত্যেক শীর্ষে সংলগ্ন বাহুদ্বয়ের দুই দিকে কোণের মানের k_i অংশ (i শীর্ষে) পরিমাণ কোণ ভিতরের দিকে আঁকা হল। কোণগুলির অন্তঃস্থ বাহুদ্বয় ত্রিভুজের মধ্যে ছেদ করে। এরূপ তিনটি ছেদবিন্দুকে A, B, C দ্বারা অভিহিত করা হল। ABC ত্রিভুজ সমবাহু হতে পারে একমাত্র তখনই যখন $k_1 = k_2 = k_3 = \frac{1}{3}$।

3.24 নং চিত্র দ্রষ্টব্য। ধরা যাক $k_2 \neq k_3$ এবং OPQ সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।



3.24 নং চিত্র

ভূমি OP এর মান 2 ধরা হল। তবে $\beta = \gamma$ এবং $\alpha = \pi - 2\beta$। Q বিন্দুর স্থানাঙ্কদ্বয় $(1, \tan\beta)$। যদি C বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) হয়, তবে

$y = x\tan\beta\,(1 - k_2)$, C এর অবস্থান বিচার করে পাই

এবং

$y - \tan\beta = (x - 1)\tan(\beta + k_1\alpha)$, Qএর অবস্থান বিচার করে পাই ... (3.72)

x-এর পক্ষে সমাধান করে পাওয়া যাবে

$$x = \frac{\tan\beta - \tan(\beta + k_1\alpha)}{\tan(\beta - k_2\beta) - \tan(\beta + k_1\alpha)}$$

$$= \frac{(\cos(\beta + k_1\alpha)/\cos\beta)\sin\beta - \sin(\beta + k_1\alpha)}{\cos(\beta + k_1\alpha)\tan(\beta - k_2\beta) - \sin(\beta + k_1\alpha)} \quad \cdots \quad (3.73)$$

$\alpha = \pi - 2\beta$ স্মরণ রেখে পাই $\frac{d}{d\beta}(\beta + k_1\alpha) = 1 - 2k_1$,

$\lim_{\beta \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\beta + k_1\alpha)}{\cos\beta} = 1 - 2k_1$ এবং

$$\lim_{\beta \to \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - 2k_1)\sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{2}\tan\left(\frac{\pi}{2} - k_2\frac{\pi}{2}\right) - \sin\frac{\pi}{2}} = 2k_1 \quad \cdots \quad (3.74)$$

যেহেতু ABC ত্রিভুজকে সমবাহু ধরা হয়েছে, β কে $\beta \to \frac{\pi}{2}$ ধরলেও ABC ত্রিভুজ সমবাহু থাকবে। এক্ষেত্রে C বিন্দুর স্থানাঙ্কদ্বয় দাঁড়াবে $\left(2k_1, 2k_1 \tan\left(\frac{\pi}{2} - k_2\frac{\pi}{2}\right)\right)$

অর্থাৎ $\left(2k_1, 2k_1 \cot\left(\frac{k_2\pi}{2}\right)\right)$ ... (3.75)

একইরূপে B এবং P বিন্দুদ্বয়ের x-স্থানাঙ্কের পার্থক্য নিশ্চিতই $2k_1$ হবে। B, C বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্কগুলি পাওয়ার পরে আমরা

$$\left.\begin{aligned} x_1 = \cot\left(k_2\frac{\pi}{2}\right),\ y_1 = \cot\left(k_3\frac{\pi}{2}\right),\\ z_1 = CB \text{ এর অর্ধ দৈর্ঘ্য},\\ \omega = CB \text{ এর } x\text{-অক্ষের সহিত উৎপন্ন কোণ} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (3.77)$$

লিখলাম। (3.76) ব্যবহার করে C এর স্থানাঙ্ক $(2k_1, 2k_1x_1)$, B এর স্থানাঙ্ক $(2-2k_1, 2k_1y_1)$ পাই। অতএব

$$\left.\begin{aligned} \sin\omega &= (2k_1y_1 - 2k_1x_1)/2z_1 = k_1(y_1 - x_1)/z_1,\\ \cos\omega &= (2-4k_1)/2z_1 \qquad\quad = (1-2k_1)/z_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (3.76)$$

CA বাহু x-অক্ষের সহিত $\left(\omega - \frac{\pi}{3}\right)$ কোণ উৎপন্ন করে। কাজেই A বিন্দুর স্থানাঙ্কদ্বয় যথাক্রমে

$$A : 2k_1 + 2z_1 \cos\left(\omega - \frac{\pi}{3}\right), 2k_1x_1 + 2z_1 \sin\left(\omega - \frac{\pi}{3}\right) \quad \ldots \quad (3.78)$$

(3.78) এর সাহায্যে $\cot\angle AOP$ এবং $\cot\angle APO$ নির্ণয় করা যায়। পুনরায় $\angle AOP = k_2\frac{\pi}{2}$, $\angle APO = k_3\frac{\pi}{2}$। আমাদের নির্দেশ করার ফলে

$$\left.\begin{aligned} \cot\left(k_2\frac{\pi}{2}\right) = x_1 = \frac{2k_1 + 2z_1\cos\left(\omega - \frac{\pi}{3}\right)}{2k_1x_1 + 2z_1\sin\left(\omega - \frac{\pi}{3}\right)}\\ \cot\left(k_3\frac{\pi}{2}\right) = y_1 = \frac{2 - 2k_1 - 2z_1\cos\left(\omega - \frac{\pi}{3}\right)}{2k_1x_1 + 2z_1\sin\left(\omega - \frac{\pi}{3}\right)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (3.79)$$

(3·77) এর সাহায্যে সমীকরণরূপে নিম্নরূপ লেখা যেতে পারে :

$$\left.\begin{aligned} 2z_1\cos\left(\omega - \frac{\pi}{3}\right) &= 1 - 2k_1 + \sqrt{3}k_1(y_1 - x_1),\\ 2z_1\sin\left(\omega - \frac{\pi}{3}\right) &= k_1(y_1 - x_1) + \sqrt{3}(1 - 2k_1) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (3{\cdot}80)$$

z_1 (3.79) এবং (3.80) হতে অপনয়ন করে পাই

$$\left.\begin{aligned} k_1x_1^2+k_1x_1y_1+\sqrt{3}(3k_1-1)x_1-\sqrt{3}k_1y_1-1=0,\\ k_1x_1y_1+k_1y_1^2+\sqrt{3}(3k_1-1)y_1-\sqrt{3}k_1x_1-1=0\end{aligned}\right\}\quad\ldots(3.81)$$

যেরূপ আশা করা যায় B, C এর প্রতিসাম্য থাকার জন্য (3.81) এ x_1 ও y_1 পরস্পর পরিবর্তন করলে একই রাশিমালা থেকে যায়। যদি x_1, y_1 এর সমান না হয়, (3.81) এর দুটি সমীকরণ বিয়োগ করে (x_1-y_1) দিয়ে ভাগ করে পাই

$$k_1x_1+k_1y_1+\sqrt{3}(3k_1-1)+\sqrt{3}k_1=0 \qquad \ldots\ (3.82)$$

(3.82) ব্যবহার করে (3.81) হ'তে y_1 অপনয়ন করলে x_1গুলি আপনা হতেই অপসারিত হয় এবং $k_1=\frac{1}{3}$ পাই। কিন্তু এক্ষেত্রে (3.82) দাঁড়ায় $x_1+y_1+\sqrt{3}=0$। ইহা সম্ভবপর নয় কারণ x_1 এবং y_1 এর মান 1 এর কম নহে। কাজেই x_1, এবং y_1 সমান নহে ধারণা সঠিক হয় নাই। অতএব সিদ্ধান্ত নেওয়া হল

$$x_1=y_1 \qquad \ldots\ (3.83)$$

(3.81) সমীকরণটি তবে

$$2k_1x_1^2+\sqrt{3}(2k_1-1)x_1-1=0 \text{।} \qquad (3.84)$$

(3·84) হতে x_1 সমাধান করে পাই

$$k_1=\frac{\sqrt{3}x_1+1}{2x_1(x_1+\sqrt{3})} \qquad \ldots\ (3{\cdot}85)$$

যেহেতু $x_1=y_1$, আমরা ধরে নিতে পারি যে $k_2=k_3$। আবার প্রথমে ধরেছিলাম যে k_2 এবং k_1 সম্ভবতঃ অসমান। কিন্তু (3·85) হতে $k_1=k_2=k_3$। কাজেই

$$x_1=\cot\left(k_2\frac{\pi}{2}\right)=\cot\left(k_1\frac{\pi}{2}\right) \text{ অর্থাৎ } k_1=\frac{2}{\pi}\cot^{-1}(x_1) \text{।} \qquad \ldots\ (3.86)$$

(3·86) এবং (3·85) হতে k_1 অপনয়ন করে

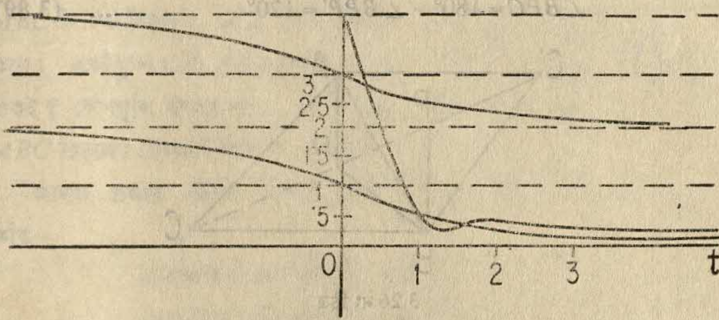
$$\frac{2}{\pi}\cot^{-1}x_1=\frac{\sqrt{3}x_1+1}{2x_1(x_1+\sqrt{3})} \qquad \ldots\ (3{\cdot}87)$$

আমরা (3·87) এর সমাধানের জন্য $F(t)$ নিম্নরূপ লিখলাম :

$$F(t)=\frac{\sqrt{3}t+1}{2t(t+\sqrt{3})}-\frac{2}{\pi}\cot^{-1}(t) \qquad \ldots\ (3.88)$$

যখন $t=1$, $t=\sqrt{3}$, $F(t)=0$ এবং ইহার সত্যতা প্রতিপাদন খুবই সহজ। পুনরায় কিন্তু যেহেতু $x_1>1$, আমরা $t=1$ উপেক্ষা করতে পারি। 3·25 নং চিত্র

দ্রষ্টব্য। 3·25 নং চিত্রে $\frac{\pi}{2}\cot^{-1}(t)$ এবং $\frac{\sqrt{3}t+1}{2t(t+\sqrt{3})}$ লেখগুলি আঁকা



3.25 নং চিত্র

হয়েছে। চিত্র হতে পরিষ্কার বুঝা যায় $t=\sqrt{3}$ একমাত্র মান 1 হতে বৃহত্তর যেখানে $F(t)=0$। কাজেই (3.87) সমীকরণের বাস্তব মূল যা 1 হতে বৃহত্তর মানের $x_1=\sqrt{3}$। (3·86) হতে পাই তখন $k_1=k_2=k_3=\frac{2}{\pi}\cot^{-1}\sqrt{3}=\frac{1}{3}$।

মর্লের উপপাদ্য ভেদ আরও কিছু আছে। পরে সেগুলির সামান্য কিছু মাত্র উল্লেখ করব। গের্‌ফুঙ্কেলের [27] প্রবন্ধ এক্ষেত্রে দ্রষ্টব্য।

5.4. মর্লের উপপাদ্য যেমন অপেক্ষাকৃত নতুন, ফেরম্যাটের বৃহত্তম দৈর্ঘ্যের মানের উপপাদ্য তেমনি প্রাচীন এবং বহুজন আলোচিত। ইহাকে চলিতভাষায় ফেরম্যাটের সমস্যা বা প্রশ্ন বলা হয়। এখন 3.26 নং চিত্র দ্রষ্টব্য।

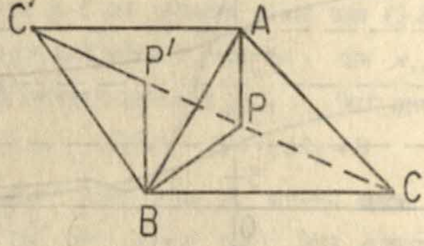
ABC একটি নির্দিষ্ট সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ। যে কোন P বিন্দু হতে শীর্ষ-বিন্দুগুলির দূরত্বের যোগফল নিরূপণ করা হল। P এর অবস্থান নির্ণয় করতে হবে যাতে উক্ত যোগফলের মান ক্ষুদ্রতম হয়।

প্রথমে P বিন্দু ত্রিভুজের অন্তঃস্থ বিন্দু মনে করা হল। P কে A, B, C বিন্দুগুলির সহিত যোগ করা হল। অন্তঃস্থ ত্রিভুজ APB কে B বিন্দুকে কেন্দ্র করে 60° কোণ ঘোরাবার পর $C'P'B$ অবস্থান পাই। কাজেই ABC', PBP' সমবাহু ত্রিভুজ হল। কারণ $\angle ABC$ কোণের মান 60°, $AB=BC'$। অনুরূপ $BP=BP'=PP'$।

সুতরাং $AP+BP+CP=C'P'+PP'+CP$। ইহার ডান দিকের যোগফল CC' পথ, অবশ্য P, P' বিন্দুদ্বয়ে বাঁক থাকতে পারে। এরূপ C হতে

C' এর এরূপ দূরত্ব ক্ষুদ্রতম হবে যদি C হতে C' পথ একই সরলরেখায় অবস্থিত হয়। তবে সেক্ষেত্রে

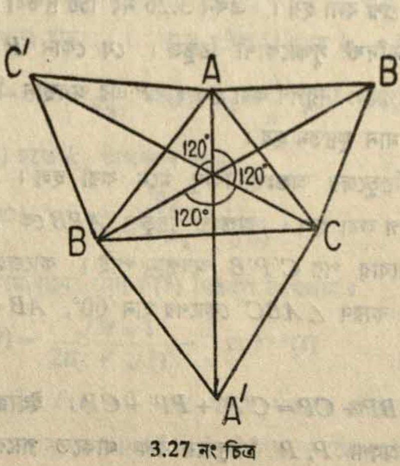
$$\angle BPC = 180° - \angle BPP' = 120° \qquad \ldots \quad (3.89)$$



3.26 নং চিত্র

(3.89) হতে অভীষ্ট $AP + BP + CP$ এর ক্ষুদ্রতম মান পেতে হলে AB, BC এবং CA বাহুগুলি P বিন্দুতে 120° কোণ উৎপন্ন করে। P এর এই অবস্থানকে 'ফেরম্যাট বিন্দু' বলা হয়। এ বিন্দুর অবস্থান পাওয়ার সহজতম পথ ABC' ত্রিভুজের পরিবৃত্ত অঙ্কন। P, CC' এর উপর ঐ পরিবৃত্তের দ্বিতীয় ছেদবিন্দু। সুতরাং AB, BC, CA বাহুগুলির উপর সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কন করে তাদের বিপরীত শীর্ষগুলির দূরত্বই ক্ষুদ্রতম P বিন্দুর দূরত্বগুলির যোগফল।

এই উপপাদ্যে মর্লে'র 'বিপরীত প্রণালী' প্রয়োগ করে প্রমাণিত হল যে, AA', BB', CC' সমবিন্দু এবং সমান এবং তাহারা পরস্পর 120° কোণে মিলিত হয়। 3.27 নং চিত্র দ্রষ্টব্য। আরও বিশদ আলোচনার জন্য কোক্সিটারের **[28]** গ্রন্থের উল্লেখ করা হল।



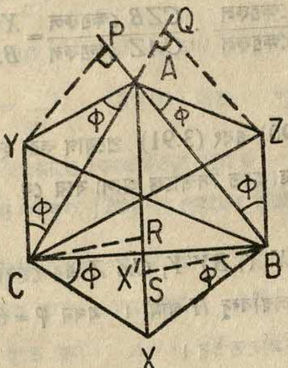
3.27 নং চিত্র

আমরা ফেরম্যাট বিন্দুর উপপাদ্যের সামান্যীকরণ করব। ত্রিভুজের বাহুগুলির উপর সমবাহু ত্রিভুজ না এঁকে সমদ্বিবাহু ত্রিভুজগুলি আঁকা হল। 3.28নং চিত্র দ্রষ্টব্য। ABC নির্দিষ্ট ত্রিভুজ। AY, BY বাহুগুলি AB বাহুর সহিত φ কোণ উৎপন্ন করে। একইরূপে CZ, AZ বাহুগুলি AC এর সহিত, BX, CX বাহুর সহিত একই φ কোণগুলি উৎপন্ন করে। যদি ABC ত্রিভুজ সমবাহু হয়, AX, BY, CZ ABC ত্রিভুজের ফেরম্যাট বিন্দু F এ মিলিত হয়।

আমরা প্রথমে নীচের লিখিত ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ত্রিভুজগুলির জোড়া নজর করি—

A শীর্ষবিন্দু এবং ভূমিগুলি BY, CZ,
B শীর্ষবিন্দু এবং ভূমিগুলি CZ, AX,
C শীর্ষবিন্দু এবং ভূমিগুলি AX, BY

যেহেতু $\dfrac{BYA \text{ ক্ষেত্রফল}}{CAZ \text{ ক্ষেত্রফল}}=\dfrac{YP\cdot AB}{ZQ\cdot CA}$ কারণ YP রেখা AB এর উপর লম্ব এবং



3.28 নং চিত্র

ZQ রেখা CA এর উপর লম্ব। সুতরাং

$$\frac{BYA \text{ ক্ষেত্রফল}}{CAZ \text{ ক্ষেত্রফল}}=\frac{YP\cdot AB}{ZQ\cdot CA}=\frac{YA\cdot AB}{ZA\cdot CA} \quad \dots \quad (3.90)$$

যেহেতু YAP, ZAQ ত্রিভুজ দুইটি সদৃশ অর্থাৎ

$$\frac{BYA \text{ ক্ষেত্রফল}}{CAZ \text{ ক্ষেত্রফল}}=\frac{CA\cdot AB}{AB\cdot CA}=1 \quad \dots \quad (3.91)$$

যেহেতু YAC, ZAB ত্রিভুজ দুইটি সদৃশ।

(3.91) হতে BYA এর ক্ষেত্রফল CAZ এর ক্ষেত্রফলের সমান এবং অনুরূপভাবে CZB এর ক্ষেত্রফল = ABX এর ক্ষেত্রফল ও AXC ক্ষেত্রফল = BCY ক্ষেত্রফল।

অন্তঃপ্রমাণ ঃ X, Y, Z একই সমতলে তিনটি নির্দিষ্ট বিন্দু। 3.28 নং চিত্র দ্রষ্টব্য। যদি BYA, CAZ এবং CZB, ABX ও AXC, BCY প্রত্যেক জোড়া সমক্ষেত্রফলবিশিষ্ট হয়, তবে AX, BY, CZ রেখাগুলি সমবিন্দু।

$$\frac{AXC \text{ ক্ষেত্রফল}}{ABX \text{ ক্ষেত্রফল}}=\frac{AX\cdot RC}{AX\cdot BS}=\frac{X'C}{BX'}, \quad \ldots \quad (3.92)$$

RC, BS যথাক্রমে C, B হতে AX এর উপর লম্ব এবং X', AX ও BC এর ছেদবিন্দু এবং CRX', BQX' সদৃশ ত্রিভুজদ্বয়। একইরূপে

$$\frac{BYA \text{ ক্ষেত্রফল}}{BCY \text{ ক্ষেত্রফল}}=\frac{Y'A}{CY'} \text{ এবং } \frac{CZB \text{ ক্ষেত্রফল}}{CAZ \text{ ক্ষেত্রফল}}=\frac{Z'B}{AZ'} \quad \ldots \quad (3.93)$$

(3.92) এবং (3.93) হতে

$$\frac{AXC \text{ ক্ষেত্রফল}}{ABX \text{ ক্ষেত্রফল}}\cdot\frac{BYA \text{ ক্ষেত্রফল}}{BCY \text{ ক্ষেত্রফল}}\cdot\frac{CZB \text{ ক্ষেত্রফল}}{CAZ \text{ ক্ষেত্রফল}}=\frac{X'C}{BX'}\cdot\frac{Y'A}{CY'}\cdot\frac{Z'B}{AZ'}=1, \quad \ldots \quad (3\cdot 94)$$

(3.94) এর বামদিকে (3.90) এবং (3.91) প্রয়োগ করা হয়েছে। অতএব সেভার উপপাদ্যের বিপরীত প্রতিজ্ঞা হতে সিদ্ধান্তে আসা যায় যে $AX'X, BY'Y, CZ'Z$ রেখাগুলি সমবিন্দু।

যদি φ চলমান হয়, $AX'X, BY'Y, CZ'Z$ এর ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথ ফেরম্যাট বিন্দু F, ভরকেন্দ্র G এবং লম্ববিন্দু H গামী। যখন $\varphi = 60°$, রেখাগুলির সমবিন্দু V ফেরম্যাট বিন্দুর সহিত মিলিত হয়।

পুনরায় $$\frac{VCA \text{ ক্ষেত্রফল}}{VAB \text{ ক্ষেত্রফল}}=\frac{XCA \text{ ক্ষেত্রফল}}{XAB \text{ ক্ষেত্রফল}}=\frac{b\sin(C+\varphi)}{c\sin(B+\varphi)} \quad \ldots \quad (3.95)$$

যেহেতু $BX=CX$। (3.95) হতে পাই যদি V ও G একই বিন্দু হয় তবে ইহার বামদিকের মান 1। V কে যদি লম্ববিন্দুর সহিত মিলিত হতে হয়

$$\frac{VCA \text{ ক্ষেত্রফল}}{VAB \text{ ক্ষেত্রফল}}=\frac{b^2\left(\sin A\cos A-\dfrac{\cos^2 C\cos B}{\sin B}\right)}{c^2\left(\sin A\cos A-\dfrac{\cos^2 B\cos C}{\sin C}\right)} \quad \ldots \quad (3.96)$$

হতে হবে। (3.95) এর মান যে 1 বা (3.96) হতে পারে তার সম্ভাবনা প্রতিষ্ঠিত হবে। ধরা যাক

$$\frac{VCA \text{ ক্ষেত্রফল}}{VAB \text{ ক্ষেত্রফল}} = \frac{y}{z} \tag{3.97}$$

(3.95) হতে

$$\cos \varphi\,(cy \sin B - bz \sin C) = \sin \varphi\,(bz \cos C - cy \cos B) \quad \ldots \; (3.98)$$

অনুরূপে যদি

$$\frac{VCA \text{ ক্ষেত্রফল}}{VBC \text{ ক্ষেত্রফল}} = \frac{y}{x} \text{ ধরা হয়,}$$

$$\cos \varphi\,(az \sin C - cx \sin A) = \sin \varphi\,(cx \cos A - az \cos C) \quad \ldots (3.99)$$

(3.98), (3.99) হতে φ অপনয়ন করে

$$ayz \sin (B - C) + bzx \sin (C - A) + cxy \sin (A - B) = 0 \quad \ldots \; (3{\cdot}100)$$

V এর অবস্থান G তে হলে $\frac{y}{z}$, $\frac{y}{x} = 1$ অর্থাৎ,

$$a \sin (B - C) + b \sin (C - A) + c \sin (A - B) = 0 \quad \ldots \; (3.101)$$

যেহেতু $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, (3·101) সত্য। পুনরায় V, H এর সহিত মিলিত হওয়ার প্রমাণ দীর্ঘ হওয়াতে বিরত হওয়া গেল।

বিশদ আলোচনার জন্য কুর্কুফ্ [29] এর প্রবন্ধের উল্লেখ করা হল।

5.5. ক্ষুদ্রতম মান নির্ণয়ের প্রশ্নে আমরা আবার ফিরে আসছি। এখন ফেরম্যাট্ বিন্দু নির্ণয়ের ত্রিকোণমিতিক প্রমাণ দেওয়া হবে। ABC নির্দিষ্ট ত্রিভুজের শীর্ষ-কোণগুলির মান $120°$ হতে কম। $AP + BP + CP$ ক্ষুদ্রতম যখন P বিন্দু S বিন্দুতে অবস্থিত হয় এবং ত্রিভুজের বাহুগুলি S বিন্দুতে প্রত্যেকেই $120°$ কোণ উৎপন্ন করে।

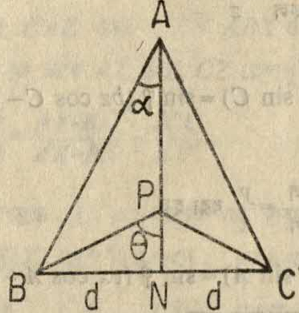
যদি ABC' সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ হয় (3.29 নং চিত্র দ্রষ্টব্য), এবং ভূমির মান $2d$, $BN = C'N = d$,

$$f(\theta) = AP + BP + C'P = d\,(\cot \alpha - \cot \theta) + 2d \operatorname{cosec} \theta \quad \ldots \; (3.102)$$

$f(\theta)$ এর মান ক্ষুদ্রতম হতে হলে

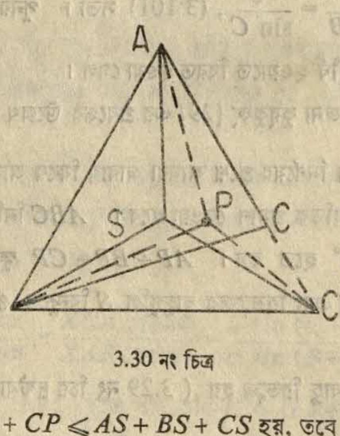
$$f'(\theta) = d \operatorname{cosec}^2\theta - 2d \operatorname{cosec} \theta \cot \theta = d \operatorname{cosec}^2\theta\,(1 - 2 \cos \theta) = 0 \quad \ldots \; (3.103)$$

যদি $\theta=\frac{\pi}{3}$ হয় ইহা (3.103) এর সমাধান এবং $\angle BPC'=\angle C'PA=\angle APB$ $=120°$) অবশ্যই যদি $BAC'<120°$ হয়। এমন যে কোন ত্রিভুজে যার



3.29 নং চিত্র

শীর্ষকোণ 120° হতে বৃহত্তর নহে, ধরা যাক $AB>AC$। AC বাহুকে C' বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত এমনভাবে করা হল যাতে $AB=AC'$ (3.30 নং চিত্র দ্রষ্টব্য)। ধরা যাক P, S ভিন্ন অন্যকোন বিন্দু। $\angle ASB=120°$ এবং যদি



3.30 নং চিত্র

$AP+BP+CP\leqslant AS+BS+CS$ হয়, তবে

$$AP+BP+C'P\leqslant AP+BP+CP+CC'$$
$$\leqslant AS+BS+CS+CC' \quad \ldots \quad (3{\cdot}104)$$

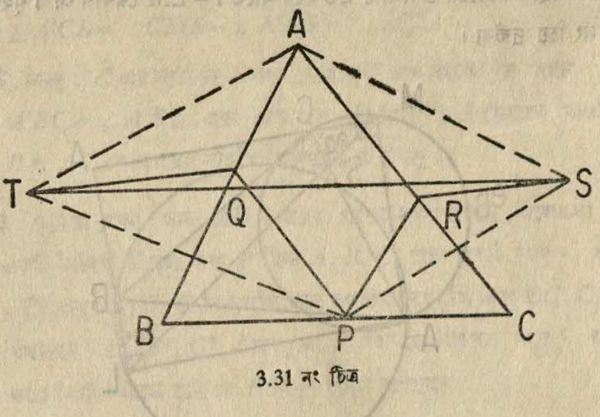
(3·104) এর ডানদিক $AS+BS+C'S$ এর সমান হতে পারে না। সুতরাং

$$AP+BP+CP>AS+BS+CS\text{।}$$

এই ক্ষুদ্রতমতার প্রশ্ন উত্থাপিত করেছিলেন পিয়েরে ফেরম্যাট্ (1601-1665 খৃষ্টাব্দে)। বিশদ আলোচনার জন্য প্রাইস্ [30], ফোর্ডারের [31] প্রবন্ধের উল্লেখ করা হল।

6. এর পরের যে প্রশ্নের আলোচনা করব সেটিও অনেকের দৃষ্টি আকর্ষণ করেছিল এবং এটিও ক্ষুদ্রতম মানের সঙ্গে যুক্ত। ABC একটি সূক্ষ্মকোণী নির্দিষ্ট ত্রিভুজ। ইহার মধ্যে ক্ষুদ্রতম পরিসীমার ত্রিভুজ অন্তর্লিখিত করতে হবে।

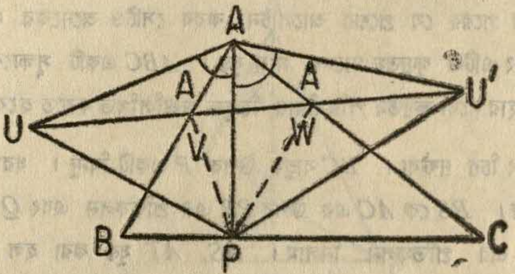
3.31 নং চিত্র দ্রষ্টব্য। BC বাহুর উপর P একটি বিন্দু। ধরা যাক PQR নির্ণেয় ত্রিভুজ। RS কে AC এর উপর PR এর প্রতিফলন এবং QT, AB এর উপর PQ এর প্রতিফলন নিলাম। AS, AT যুক্ত করা হল। অতএব $PQ+QR+RP$ পরিসীমা $=QT+RQ+RS$। ইহার মান ক্ষুদ্রতম যখন T, Q, R, S সকলেই সমরেখ অর্থাৎ রেখা TS এমন যে স্পষ্টতঃই $\angle TAS = 2\angle A$। পুনরায় TS ক্ষুদ্রতম হবে যখন ইহা $\angle TAS$ এর অন্তর্দ্বিখণ্ডকের



3.31 নং চিত্র

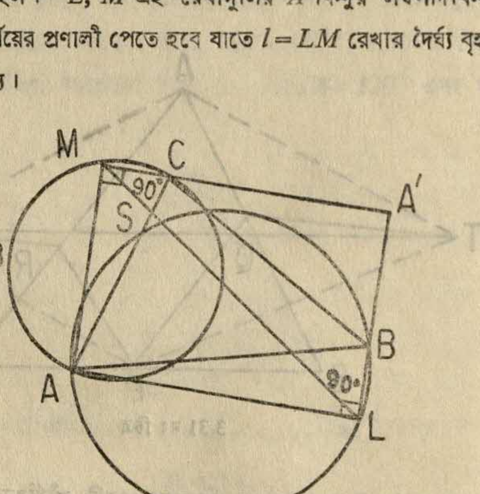
উপর লম্ব হয় অর্থাৎ P লম্বপাদবিন্দু ত্রিভুজের একটি শীর্ষবিন্দু। কাজেই ক্ষুদ্রতম পরিসীমার অন্তর্লিখিত ত্রিভুজ নির্দিষ্ট ত্রিভুজের লম্বপাদবিন্দুশীর্ষক ত্রিভুজ। ত্রিভুজটি আঁকতে হলে নির্দিষ্ট ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু A হতে বিপরীত বাহুর উপর লম্ব AP টানতে হবে। AB, AC এর উভয়দিকে $\angle A$ কোণ আঁকতে হবে। $AU=AU'=AP$। UU' যোগ করতে হবে (3.32 নং চিত্র দ্রষ্টব্য)। UU' এর সহিত AB, AC এর ছেদবিন্দু যথাক্রমে V, W। PVW নির্ণেয় ত্রিভুজ।

6·1 ক্ষুদ্রতমের দুইটি প্রশ্ন আলোচনা করা হয়েছে। কিন্তু জ্যামিতির সাহায্যে এরূপ ক্ষুদ্রতম মান নির্ণয় আরও আছে। আরও দুইটি-বৃহত্তম মান জ্যামিতির সাহায্যে নির্ণয় করব। প্রথমটি নিম্নরূপ ঃ



3.32 নং চিত্র

ABC নির্দিষ্ট ত্রিভুজ এবং *A, B, C* ভিন্ন *A'* বিন্দু হতে *B, C* এর মধ্য দিয়ে সরলরেখাদ্বয় টানা হল। *L, M* এই রেখাগুলির *A* বিন্দুর লম্বপাদবিন্দু দুইটি। *A'* এর অবস্থান নির্ণয়ের প্রণালী পেতে হবে যাতে $l = LM$ রেখার দৈর্ঘ্য বৃহত্তম হয়। 3·33 নং চিত্র দ্রষ্টব্য।



3.33 নং চিত্র

প্রথমে লক্ষ্যণীয় যে $\angle AMC$ এক সমকোণ। অতএব e_B বৃত্ত *AC* ব্যাসের উপর অঙ্কিত হয়ে *M* বিন্দুর সঞ্চারপথ হয়েছে। অনুরূপ *L* বিন্দুর সঞ্চারপথ *AB* ব্যাসের উপর অঙ্কিত e_C বৃত্ত। *ML* রেখার দৈর্ঘ্য বৃহত্তম হতে হলে *LM* কে

$\mathscr{C}_B$ বৃত্তের M বিন্দুতে স্পর্শকের উপর লম্ব হবে অর্থাৎ LM রেখা $\mathscr{C}_B$ বৃত্তের কেন্দ্রগামী। একই কারণে LM রেখা AB এর মধ্যবিন্দুগামী কাজেই

$$\text{বৃহত্তম } LM \text{ এর দৈর্ঘ্য} = \tfrac{1}{2}(a+b+c) \text{।} \qquad \dots \quad (3{\cdot}105)$$

a, b, c নির্দিষ্ট ত্রিভুজ ABC এর বাহুগুলির দৈর্ঘ্য। এতএব LM এর বৃহত্তম দৈর্ঘ্য নির্দিষ্ট ত্রিভুজের অর্ধপরিসীমা। A' এর অবস্থান নির্ণয় করবার জন্য $ALA'M$ চতুর্ভুজের সাহায্য নিয়ে পাই

$$\begin{aligned}\angle CAA' &= \angle MAA' - \angle MAC = \angle MLA - \angle MAC\\ &= \angle AA'L - \angle LBA\\ &= \left(\frac{\pi}{2} - \angle A'AL\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \angle LAB\right) = \angle A'AB \quad \dots \ (3{\cdot}106)\end{aligned}$$

$(3{\cdot}106)$ হতে সিদ্ধান্ত হবে যে A' বিন্দু ত্রিভুজের $\angle A$ কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত। পুনরায়

$$\angle A'CB = \pi - (\angle ACB + \angle MCA) \text{।}$$

অতএব $\angle A'CB = \angle CMS = \angle MCS = \angle A'CZ, \qquad \dots \quad (3{\cdot}107)$

কারণ S বিন্দু AC এর মধ্যবিন্দু এবং $\angle AMC$ এক সমকোণের সমান। একই রূপে $\angle A'BC = \angle A'BY$ এবং একারণে A' বিন্দু $\angle A$ কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক এবং $\angle B$ ও $\angle C$ কোণদ্বয়ের বহির্দ্বিখণ্ডকদ্বয়ের ছেদবিন্দু।

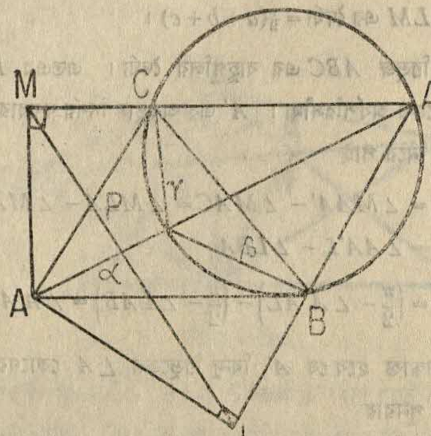
6·2 আমরা এখন আর একটি উপরের প্রশ্নের সদৃশ প্রশ্নের আলোচনা করব। ABC একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজ এবং P বিন্দু A, B, C ভিন্ন একটি বিন্দু। ধরা যাক α, β, γ P বিন্দুর A, B, C বিন্দুগুলি হতে যথাক্রম দূরত্বগুলি এবং BC, CA, AB বাহুত্রয় যথাক্রমে A^*, B^*, C^* কোণগুলি P বিন্দুতে উৎপন্ন করে। জ্যামিতি ব্যবহার করে নির্ণয় করতে হবে যে P বিন্দুর কোন অবস্থানে

$$q(P) = \alpha \sin A^* + \beta \sin B^* + \gamma \sin C^*$$

বৃহত্তম।

ABC নির্দিষ্ট ত্রিভুজে P উপরে উল্লিখিতরূপ স্থানে অবস্থিত (3·34নং চিত্র দ্রষ্টব্য)। A' বিন্দু PBC ত্রিভুজের পরিবৃত্তের সহিত AP এর বর্ধিতাংশের ছেদবিন্দু। L, M বিন্দুদ্বয়কে এমনভাবে নিতে হবে যে $\angle BLA$ কোণ এক সমকোণ এবং BL রেখা A' বিন্দুগামী। একইরূপে $\angle AMC$ কোণ এক সমকোণ এবং

CM রেখা *A'* বিন্দুগামী। অঙ্কন পদ্ধতি হতে *A'BPC* এবং *A'LAM* চতুর্ভুজদ্বয় বৃত্তস্থ। একারণে আমরা নীচের লিখিত কোণগুলি সমান পাই ঃ



3.34 নং চিত্র

$$\left.\begin{aligned} \angle PCB &= \angle PA'B = \angle AML \\ \text{অনুরূপ} \quad \angle PBC &= \angle PA'C = \angle ALM \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (2\cdot108)$$

অতএব *PBC*, *ALM* ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ। পুনরায়

$$\angle BCA' = \angle BPA' = \pi - C^*, \ \angle CBA' = \pi - B^*,$$

$$\angle BA'C = \pi - A^* \quad \ldots \quad (3\cdot109)$$

কাজেই $\angle MCA = (\pi - C) - (\pi - C^*) = C^* - C$ । ... (3·110)

ধরা যাক *LM* এর দৈর্ঘ্য *l*। *ALM* ত্রিভুজের অপর বাহু দুইটির দৈর্ঘ্য নির্ণীত হয় যে

$$AM = b \sin (C^* - C), \ AL = c \sin (B^* - B) \quad \ldots \quad (3\cdot111)$$

ALM, *PBC* দুইটি সদৃশ ত্রিভুজ হতে ও (3·111) পাই

$$\frac{l}{b \sin (C^* - C)} = \frac{a}{\gamma} \quad । \quad \ldots \quad (3\cdot112)$$

যেরূপ γ এর পক্ষে (3·112) সম্বন্ধ পাওয়া গিয়েছে, অনুরূপ α, β এর জন্য সম্বন্ধ পাওয়া যাবে। সেগুলি সাজিয়ে লিখে পাই

$$\alpha = \frac{bc}{l} \sin (A^* - A), \ \beta = \frac{ca}{l} (B^* - B), \ \gamma = \frac{ab}{l} \sin (C^* - C)$$

$$\ldots \quad (3\cdot113)$$

বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ $ALA'M$ হতে টলেমির উপপাদ্যের সাহায্যে

$$AA'.\ LM = AM\ .\ A'L + AM'.\ AL \qquad \ldots (3{\cdot}114)$$

কিন্তু $A'BC$ ত্রিভুজে সাইন সূত্র প্রয়োগ করলে পাই

$$\left.\begin{aligned} A'B &= \frac{a \sin C^*}{\sin A^*} \text{ এবং একইরূপে} \\ A'C &= \frac{a \sin B^*}{\sin A^*} \end{aligned}\right\} \qquad \ldots (3{\cdot}115)$$

পুনরায়, যেহেতু AA', ALM ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাস,

$$\frac{LM}{\sin MAL} = \frac{l}{\sin A^*} = AA' \text{।}$$ অতএব (3·114), (3·115) হতে পাই

$$\frac{l^2}{\sin A^*} = AA', l = l \sin (C^* - C)\left\{c \cos (B^* + B) + \frac{a \sin C^*}{\sin A^*}\right\}$$
$$+ c \sin (B^* - B)\left\{b \cos (C^* - C) + \frac{a \sin B^*}{\sin A^*}\right\} \text{।}$$

উপরের রাশিটি সরল করে এবং সাজিয়ে নিয়ে লেখা যায় যে

$$l^2 = bc \sin A^* \sin (A^* - A) + ca \sin B^* \sin (B^* - B) + ab \sin C^* \sin (C^* - C) \qquad \ldots (3{\cdot}116)$$

(3·113) হতে $\sin (A^* - A) = \frac{\alpha l}{bc}$ ইত্যাদি লিখে (3·116) হতে

$$l = \alpha \sin A^* + \beta \sin B^* + \gamma \sin C^* \qquad \ldots (3{\cdot}117)$$

কাজেই পূর্বের প্রশ্নের LM এবং এই প্রশ্নের $q(p)$ সমার্থক অর্থাৎ

$$\text{বৃহত্তম } q(P) = \tfrac{1}{2}(a + b + c) = \text{বৃহত্তম } l \text{।} \qquad \ldots (3{\cdot}118)$$

বস্তুতঃ P বিন্দু ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র। আমরা স্পষ্টতঃ দেখি যে BP রেখা $\angle ABC$ কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক, CP রেখা $\angle BCA$ কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক। LM রেখা অবশ্যই AB এবং AC বাহুর সমদ্বিখণ্ডক। কাজেই $q(P)$ এর বৃহত্তম মানের পরিস্থিতিতে

$$\angle A^* = \angle LAM = \angle BAC + \angle MAC + \angle LAB$$
$$= \angle A + (\angle AML + \angle ALM) = \angle A + (\pi - \angle A^*)$$

অর্থাৎ, $\angle A^* = \frac{\pi}{2} + \frac{\angle A}{2},\ \angle B^* = \frac{\pi}{2} + \frac{\angle B}{2},\ \angle C^* = \frac{\pi}{2} + \frac{C}{2} \ldots (3{\cdot}119)$

(3·119) হতে

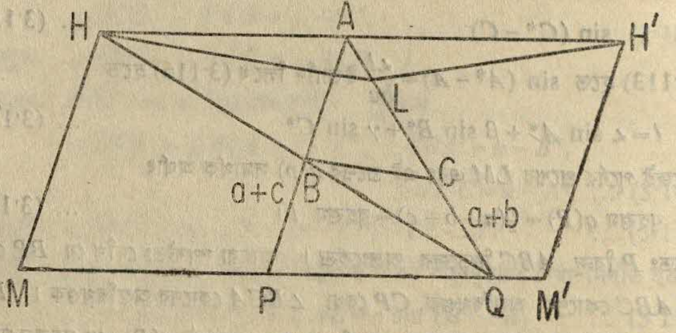
$$\sin (A^* - A) = \cos \frac{A}{2}, \sin (B^* - B) = \cos \frac{B}{2}, \sin (C^* - C) = \cos \frac{C}{2} \text{।}$$

কাজেই $q(P)$ এর বৃহত্তম মানের পরিস্থিতিতে উপরের রাশিগুলি হতে পাই

$$\alpha = \frac{2bc \cos A/2}{a+b+c}, \beta = \frac{2ca \cos B/2}{a+b+c}, \gamma = \frac{2ab \cos C/2}{a+b+c} \quad \dots (3\cdot120)$$

ক্ষুদ্রতম ও বৃহত্তম মানের নানা প্রশ্নের বিশদ আলোচনার জন্য কোক্সিটার [32] লাওডেন [33] উল্লেখ করা হল। বিভিন্ন ধরণের প্রশ্নের মধ্যে কোন কোন উপাদান দেওয়া আছেও ত্রিভুজটি অঙ্কিত করতে হবে এবং তার ক্ষুদ্রতম পরিসীমা নির্ণয় করতে হবে যদি কোন উপাদান চল হয়। কাজেই বিভিন্ন ধরণের উপাদানে ত্রিভুজ অঙ্কনও প্রশ্ন হিসাবে আসবে। নীচে একটি উদাহরণ দেওয়া হল।

6.3 একটি ত্রিভুজের বাহুগুলির দুটির যোগফল $AP = a+c$, $AQ = a+b$ এবং কোণ $\angle PAQ = A$ দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন করতে হবে। 3·35 নং চিত্র দ্রষ্টব্য। ত্রিভুজটি আঁকা যেতে পারে যদি আমরা B বিন্দুকে A ও P এর মধ্যে এমনভাবে পেতে পারি যে $PB = BC = a$ এবং C বিন্দু AQ এর উপর এমনভাবে আছে যে $QC = BC = a$ হয় তবে ABC নির্ণেয় ত্রিভুজ হবে।



3.35 নং চিত্র

QA রেখার উপর $QL = AP$ কেটে নেওয়া হল। L কে কেন্দ্র করে AP কে ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ আঁকা হল। এই বৃত্তচাপ A বিন্দু দিয়ে PQ এর সমান্তরাল রেখাকে H ও H' বিন্দুদ্বয়ে ছেদ করে। LH, QH যোগ করা হল। QH রেখা AP কে B বিন্দুতে ছেদ করে। HM রেখা AP এর সমান্তরাল টানা হল। এই রেখা PQ এর বর্ধিতাংশকে M বিন্দুতে ছেদ করে। শেষে BC কে HL এর সমান্তরাল করে আঁকলে C বিন্দুতে ছেদ করে। ABC নির্ণেয় ত্রিভুজ।

অঙ্কনপ্রণালী হতে $MH = HL = LQ$। একই কারণে $MHLQ$, $PBCQ$ সদৃশরূপী চতুর্ভুজ। Q কে সদৃশতার কেন্দ্র মনে করা যেতে পারে। কাজেই

$$PB = BC = CQ = a \quad \ldots (3{\cdot}121)$$

ত্রিভুজের দ্বিতীয় সমাধানও সম্ভব। আমরা QH' যোগ করে, M, B, C বিন্দুর অনুরূপ M', B', C' পেতে পারি। $PB'C'Q$ চতুর্ভুজ $M'H'LQ$ চতুর্ভুজের সদৃশরূপী। B' বিন্দু AP এর বর্ধিতাংশে এবং C' বিন্দু AQ এর বর্ধিতাংশে অবস্থিত। যদি $\angle PAQ = 60°$ হয় QH, QH' এর একটি রেখা AP এর সমান্তরাল অর্থাৎ এক্ষেত্রে একটি মাত্র সমাধান সম্ভব।

পুনরায় আমরা L এর পরিবর্তে AQ এর বর্ধিতাংশে L' নিতে পারি। যাতে $QL' = AP$। L' কেন্দ্র করে দ্বিতীয় একটি AP ব্যাসার্ধের বৃত্তচাপ অঙ্কন করব। এই দ্বিতীয় বৃত্তচাপ A বিন্দুর মধ্য দিয়ে PQ এর সমান্তরাল রেখাকে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে। ছেদবিন্দু দুইটি বাস্তব, একবিন্দুতে মিলিত বা অবাস্তব হবে যথাক্রমে যদি

$$AL' \sin AQP \underset{>}{\leqslant} AP \text{।} \quad (3{\cdot}122)$$

যদি $\angle PAQ = 120°$ হয় QH, QH' একটি রেখা AP এর সমান্তরাল হবে এবং সেক্ষেত্রে একটি মাত্র সমাধান সম্ভব। অবশেষে, সবগুলি সমাধান একত্র করে লিখতে পারি যে দুইটি, তিনটি বা চারটি সমাধান সম্ভব যদি যথাক্রমে

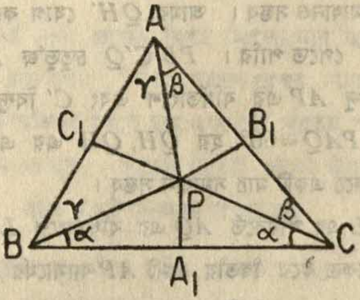
$$AL \sin AQP - AP \underset{>}{\leqslant} 0 \text{।} \quad \ldots (3{\cdot}123)$$

$\angle PAQ = 60°$ বা $120°$ হলে সমাধানের সংখ্যা একটি করে কমে যাবে। $\angle PAQ$ কোণ $60°$ হতে ক্ষুদ্রতর হলে দুইটি মাত্র সমাধান আছে এবং $120°$ হতে বৃহত্তর হলে চারটি সমাধান সম্ভব।

বিকল্প প্রণালী হিসাবে PAQ ত্রিভুজের $PU = QV = k$ PA, QA হতে যথাক্রমে কেটে নিলাম। U বিন্দুর মধ্য দিয়ে PQ এর সমান্তরাল রেখা V কে কেন্দ্র করে k ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্তকে X বিন্দুতে ছেদ করে। QX বর্ধিত করলে AP কে নির্ণেয় শীর্ষবিন্দু B তে ছেদ করে। BC রেখা XV রেখার সমান্তরাল টানতে হবে অর্থাৎ ABC ত্রিভুজ পাওয়া যাবে। বিস্তারিত আলোচনার জন্য টেস্টার [34] এবং লিংবি [35] এর প্রবন্ধগুলি উল্লেখ করা হল।

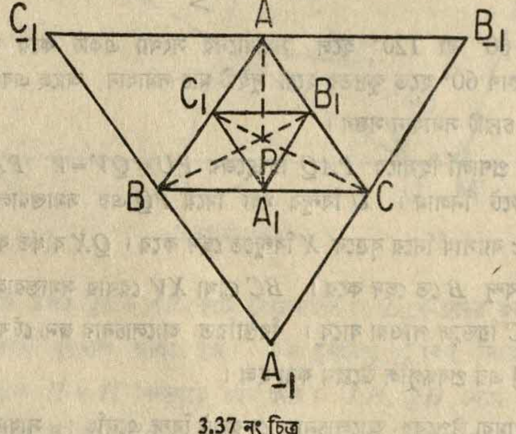
7. আমরা উপরের আলোচনায় ফেরমাট্ বিন্দু এনেছি। সাধারণতঃ সকলেই ভরকেন্দ্র, অন্তঃকেন্দ্র, পরিকেন্দ্র এবং লম্ববিন্দুর সঙ্গে পরিচিত। এই পরিচয় আরও গভীর হতে পারে যদি তাদের নিয়েও আরও উপপাদ্য সৃষ্টি করা যায়।

ধরা যাক ABC ত্রিভুজের P একটি অন্তঃস্থ নির্দিষ্ট বিন্দু। PA_1, PB_1, PC_1 রেখাগুলি P বিন্দু হতে BC, CA, AB এর উপর যথাক্রমে লম্ব (3·36 নং চিত্র দ্রষ্টব্য)।



3.36 নং চিত্র

ধরা যাক A_1, B_1, C_1 যথাক্রমে BC, AC, AB এর মধ্যবিন্দু। $A_1\, B_1\, C_1$ ত্রিভুজকে G_1 দিয়ে অভিহিত করলাম। ABC ত্রিভুজকে সামঞ্জস্য রেখে G দিয়ে অভিহিত করা হল। অনুরূপ G_1 ত্রিভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দু যথাক্রম A, B, C (3·37 নং চিত্র দ্রষ্টব্য) এবং $PA,\ PB, PC$ রেখাগুলি $B_{-1}C_{-1}, C_{-1}A_{-1}, A_{-1}B_{-1}$ এর উপর লম্ব। অনুরূপ আমরা $\cdots G_{-n}, G_{-(n-1)}, \cdots G_{-1}, G, G_1, \cdots G_n \cdots$ ত্রিভুজের রাশিমালা সৃষ্টি করতে পারি। অঙ্কনপ্রণালী হতে পাই যে

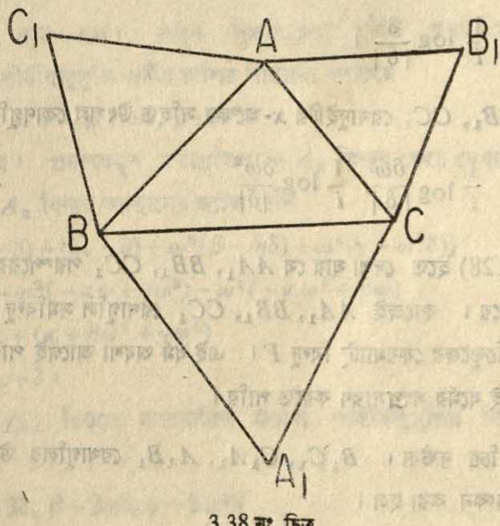


3.37 নং চিত্র

P বিন্দু G ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র এবং $PA = PB = PC$। যেহেতু A_1, B_1, C_1 বিন্দুগুলি যথাক্রমে BC, CA, AB এর মধ্যবিন্দু এবং PA_1, PB_1, PC_1

রেখাগুলি BC, CA, AB এর উপর যথাক্রমে লম্ব অর্থাৎ PA_1, PB_1, PC_1 যথক্রমে B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 এর উপর লম্ব। কাজেই P বিন্দু G ত্রিভুজের লম্ববিন্দু। পুনরায় অঙ্কন প্রণালী অনুসারে A বিন্দু B_{-1} C_{-1} এর মধ্যবিন্দু এবং PA রেখা $B_{-1}C_{-1}$ এর উপর লম্ব। একই রূপে $C_{-1}A_{-1}, A_{-1}B_{-1}$ যথাক্রমে B, C বিন্দুর সহিত সম্পর্কিত। $BPAC_{-1}$ বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। কাজেই $\angle BA_{-1}P = \angle BCP = \alpha$ (3·36 নং চিত্র দ্রষ্টব্য)। একইরূপে $\angle CA_{-1}P = \angle CBP = \alpha$। অতএব $A_{-1}P$ রেখা $\angle B_{-1}A_{-1}C_{-1}$ কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক। অনুরূপ $B_{-1}P$ রেখা $\angle C_{-1}B_{-1}A_{-1}$ কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক এবং $C_{-1}P$ রেখা $\angle A_{-1}C_{-1}B_{-1}$ কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক। কাজেই P বিন্দু G_{-1} ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র। সুতরাং $\cdots G_{-2}G_{-1}G\ G_1G_2\cdots$ ত্রিভুজগুলির রাশিমালায় P অন্তঃকেন্দ্র, পরিকেন্দ্র এবং লম্ববিন্দু পর্যায়ক্রমে হয় অর্থাৎ P বিন্দুর পর্যায়$\cdots$লম্ববিন্দু, অন্তঃকেন্দ্র, পরিকেন্দ্র, লম্ববিন্দু, অন্তঃকেন্দ্র$\cdots$ইত্যাদি।

7.1. নেপোলিয়নের নামের সঙ্গে কিছু উপপাদ্যের নাম জড়িত আছে। তিনি ইউরোপের সৃজনশীল যুগে জীবিত ছিলেন। নিজেও এই সৃজনের মধ্যে তিনি অংশ নিয়েছিলেন। তাঁর বিশেষ করে জ্যামিতি বিষয়ে অনুসন্ধানে উৎসাহ ছিল। নীচে যে উপপাদ্যের আলোচনা করব তার সঙ্গে উপরের উপপাদ্য এবং ফেরম্যাট্ বিন্দুর সঙ্গে সাদৃশ্য আছে। (3·38) নং চিত্র দ্রষ্টব্য।



3.38 নং চিত্র

ABC একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের A, B, C, বিন্দুগুলি α, β, γ জটিল সংখ্যা দিয়ে নির্দেশ করা হল। A_1BC, AB_1C, AC_1B সমবাহু ত্রিভুজগুলি BC, CA, AB বাহুগুলির উপর যথাক্রমে অঙ্কিত হল। তবে A_1, B_1, C_1 বিন্দুগুলিকে নীচের জটিল সংখ্যাগুলি দিয়ে যথাক্রমে অঙ্কিত করা যায়,

$$\alpha-\delta,\ \beta-\omega\bar{o},\ \gamma-\omega^2\delta, \qquad \ldots (3{\cdot}124)$$

$\delta=\alpha+\omega^2\beta+\omega^4\beta$, ω রাশি (-1) এর ঘনমূল অর্থাৎ $\sqrt[3]{-1}$। কাজেই $\omega^3=-1$ এবং $\omega_6=1$। গণিতবিদ গাউস্ জটিল রাশির ব্যাপক ব্যবহারের প্রচলন করেছিলেন। নেপোলিয়ন তাঁর সমসাময়িক ছিলেন এবং গণিতের আবিষ্কার-গুলির সহিত পরিচিত ছিলেন। (3·124) এর রাশিগুলির প্রাপ্তি বিচার সমীচীন হবে। উদাহরণতঃ C_1 বিন্দুর নির্দেশক জটিল রাশি

$$\alpha+(\alpha-\beta)\omega=-\alpha\omega^2-\beta\omega^4$$

অর্থাৎ $\gamma-\omega^2(\alpha+\beta\omega^2+\gamma\omega^4)$। ... (3·125)

AA_1, BB_1, CC_1 এর প্রত্যেকের দৈর্ঘ্য

$$|\delta| \text{ যেহেতু } |\omega|=|\omega^2|=1 \qquad \ldots (3{\cdot}126)$$

অর্থাৎ $AA_1=BB_1=CC_1$। পুনরায় AA_1 এর x-অক্ষরেখার সহিত উৎপন্ন কোণের মান ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে মাপলে পরে

$$\frac{1}{i}\log\frac{\delta}{|\delta|}\text{।} \qquad \ldots (3{\cdot}127)$$

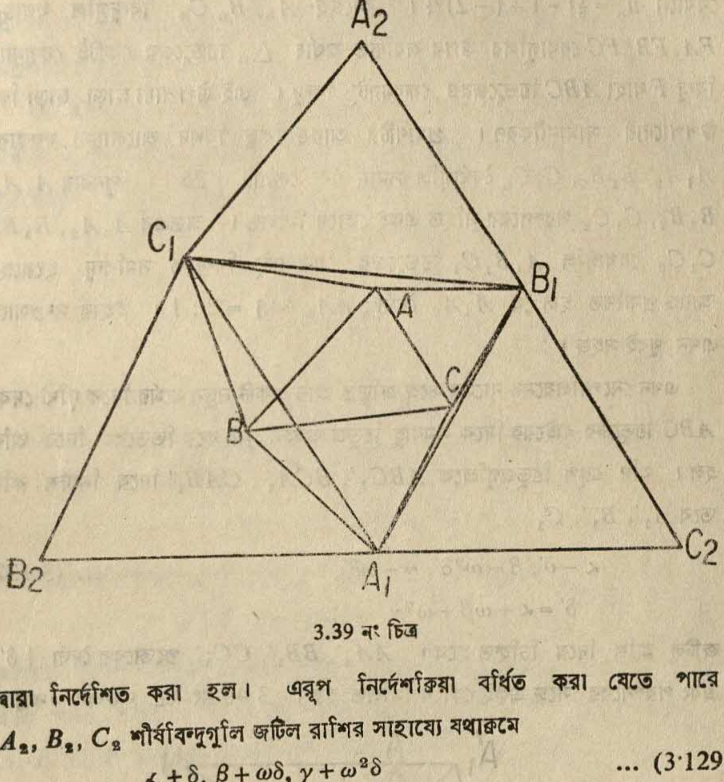
অনুরূপভাবে BB_1, CC_1 রেখাদুইটির x-অক্ষের সহিত উৎপন্ন কোণগুলি যথাক্রমে

$$\frac{1}{i}\log\frac{\delta\omega}{|\delta|},\ \frac{1}{i}\log\frac{\delta\omega^2}{|\delta|} \qquad \ldots (3{\cdot}128)$$

(3·127), (3·128) হতে দেখা যায় যে AA_1, BB_1, CC_1 পরস্পরের মধ্যে একই কোণ উৎপন্ন করে। কাজেই AA_1, BB_1, CC_1 রেখাগুলি সমবিন্দু এবং এক্ষেত্রে বিন্দুটি ABC ত্রিভুজের ফেরম্যাট্ বিন্দু F। এই ধর্ম অবশ্য আগেই পাওয়া হয়েছে। এখন আমরা এই ধর্মের সম্প্রসারণ করতে পারি।

3·39 নং চিত্র দ্রষ্টব্য। B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 রেখাগুলির উপর সমবাহু ত্রিভুজ তিনটি অঙ্কন করা হল।

পরের ধাপের ত্রিভুজগুলি $B_1C_1A_2$, $C_1A_1B_2$, $A_1B_1C_2$ দ্বারা নির্দেশিত হল। ABC ত্রিভুজকে $\triangle$ দ্বারা, $A_1B_1C_1$ ত্রিভুজকে $\triangle_1$ দ্বারা, $A_2B_2C_2$ কে $\triangle_2$



3.39 নং চিত্র

দ্বারা নির্দেশিত করা হল। এরূপ নির্দেশক্রিয়া বর্ধিত করা যেতে পারে। A_2, B_2, C_2 শীর্ষবিন্দুগুলি জটিল রাশির সাহায্যে যথাক্রমে

$$\alpha+\delta,\ \beta+\omega\delta,\ \gamma+\omega^2\delta \qquad \ldots (3{\cdot}129)$$

দিয়ে নির্ণীত হয়। প্রমাণস্বরূপ সত্যপ্রতিপাদন A_2 বিন্দুর ক্ষেত্রে দেখালেই যথেষ্ট। (3·124) হতে A_2 বিন্দুর অবস্থানের জটিল রাশি

$$\begin{aligned}&(\alpha-\delta)-\{(\alpha-\delta)+\omega^2(\beta-\omega\delta)+\omega^4(\gamma-\omega^2\delta)\}\\ &=-\omega^2(-\alpha\omega+\gamma\omega^2)-\omega^4(-\alpha\omega^2+\beta\omega)\\ &=\alpha+(\alpha+\beta\omega^2+\gamma\omega^4)\\ &=\alpha+\delta\text{।}\end{aligned}$$

অনুরূপ রাশি $\triangle_3$ ত্রিভুজে সম্প্রসারিত করলে, শীর্ষবিন্দুগুলির নির্দেশক জটিল রাশিগুলি

$$\alpha-3\delta,\ \beta-3\omega\delta,\ \gamma-3\omega^2\delta \qquad \ldots (3{\cdot}130)$$

সাধারণ ত্রিভুজ $\triangle_n$ এর শীর্ষের জটিল রাশিগুলি হবে

$$\alpha + u_n\delta,\ \beta + \omega u_n\delta,\ \gamma + \omega^2 u_n\delta \qquad \ldots (3\cdot131)$$

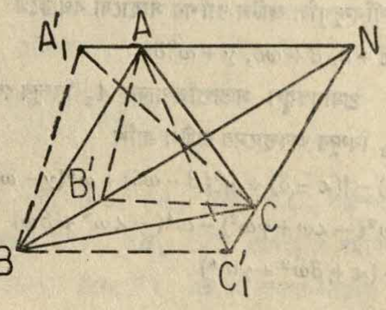
যেখানে $u_n = \frac{1}{3}\{-1+(-2)^n\}$। কাজেই A_n, B_n, C_n বিন্দুগুলি যথাক্রমে FA, FB, FC রেখাগুলির উপর অবস্থিত অর্থাৎ $\triangle_n$ ত্রিভুজের একটিই ফেরম্যাট্ বিন্দু F যাহা ABC ত্রিভুজেরও ফেরম্যাট্ বিন্দু। এই উপপাদ্য ছাড়া ছাড়া কিছু উপপাদ্যের সামান্যীকরণ। প্রমাণটির আরও কিছু বিশদ আলোচনা দরকার। A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 দৈর্ঘ্যগুলি সমান এবং দৈর্ঘ্যটি $|2\delta|$। পুনরায় A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 পরস্পরের সহিত একই কোণে মিলিত। অতএব A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 রেখাগুলি $A_1B_1C_1$ ত্রিভুজের ফেরম্যাট্ বিন্দুতে সমবিন্দু হয়েছে। আরও প্রমাণিত হল যে A_1A_2 দৈর্ঘ্য : AA_1 দৈর্ঘ্য $= 2:1$। ইহার সম্প্রসারণ এখন খুবই সহজ।

এখন নেপোলিয়নের নামের সঙ্গে জড়িত আর একটি নতুন ধর্মের দিকে দৃষ্টি দেব। ABC ত্রিভুজের বাইরের দিকে সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কন না করে ভিতরের দিকে আঁকা হল। যদি এরূপ ত্রিভুজগুলিকে ABC_1', BCA_1', CAB_1' দিয়ে নির্দেশ করি, তবে A_1', B_1', C_1'

$$\alpha - \delta',\ \beta - \omega^2\delta',\ \gamma - \omega\delta', \qquad \ldots (3\cdot132)$$

$$\delta' = \alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma$$

জটিল রাশি দিয়ে চিহ্নিত হবে। AA_1', BB_1', CC_1' প্রত্যেকের দৈর্ঘ্য $|\delta'|$ এবং পরস্পরের সঙ্গে একই কোণে মিলিত হয়। 3·40 নং চিত্র দ্রষ্টব্য। কাজেই

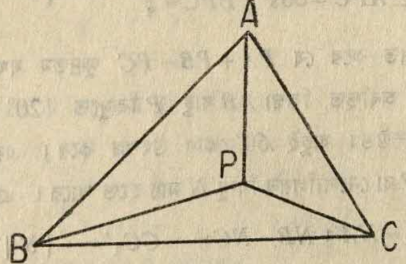


3.40 নং চিত্র

AA_1', BB_1', CC_1' রেখাগুলি ABC_1', BCA_1', CAB_1' ত্রিভুজগুলির পরিবৃত্তগুলির ছেদবিন্দুতে মিলিত হয় কারণ $\angle AC_1'B$ কোণ ABC_1' ত্রিভুজের

পরিবৃত্তস্থ 120° কোণের বিপরীত। অনুরূপ BCA_1', CAB_1' ত্রিভুজগুলির ক্ষেত্রেও পাই। কাজেই AA_1', BB_1', CC_1' পরিবৃত্তগুলির ছেদবিন্দু N এ সমবিন্দু। N বিন্দুর সঙ্গে ফেরম্যাট্ বিন্দুর সাদৃশ্য এবং অর্থবহতা এখানে আলোচনা অপ্রাসঙ্গিক হবে না।

যদি $C < 60° < A$ হয়, $PA + PB - PC$ এর মান N বিন্দুতে ক্ষুদ্রতম হবে এবং তখন ইহার মান— $| \delta' |$। অন্য সকল ক্ষেত্রে A বা B শীর্ষবিন্দুতে ক্ষুদ্রতম মান হবে। 3·41 নং চিত্র দ্রষ্টব্য।



3.41 নং চিত্র

$f(P) = PA + PB - PC \geqslant PA - BC$ যেহেতু $PB + BC \geqslant PC$ অর্থাৎ

$$f(P) \geqslant -BC \qquad \ldots \qquad \ldots \quad (3.133)$$

কাজেই $f(P)$ নীচের মানে সীমাবদ্ধ। কিন্তু ইহার উপরদিকের মান অসীম হতে পারে, কারণ P বিন্দু যে কোন দূরত্বে অবস্থিত হতে পারে। ধরা যাক A, B, C, P বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2), (p_1, p_2)। P বিন্দুতে $f(P)$ ক্ষুদ্রতম হতে হলে

$$\frac{\partial f(P)}{\partial p_1} = 0, \quad \frac{\partial f(P)}{\partial p_2} = 0 \qquad \ldots \qquad \ldots \quad (3.134)$$

$$f(P) = \sqrt{(p_1 - a_1)^2 + (p_2 - a_2)^2} + \sqrt{(p_1 - b_1)^2 + (p_2 - b_2)^2} - \sqrt{(p_1 - c_1)^2 + (p_2 - c_2)^2}$$

(3.134) হতে পাই

$$\frac{p_1 - a_1}{PA} + \frac{p_1 - b_1}{PB} - \frac{p_1 - c_1}{PC} = 0,$$

$$\frac{p_2 - a_2}{PA} + \frac{p_2 - b_2}{PB} - \frac{p_2 - c_2}{PC} = 0 \qquad \ldots \qquad \ldots \quad (3.135)$$

(3.135) হতে পুনর্বিন্যাস, বর্গ এবং যোগ করে পাই

$$2+2\cdot\frac{(p_1-a_1)(p_1-b_1)+(p_2-a_2)(p_2-b_2)}{PA\cdot PB}=1 \qquad \ldots \quad \ldots \quad (3.136)$$

(3.136) প্রমাণিত করে যে P বিন্দুর যে অবস্থানে $PA+PB-PC$ ক্ষুদ্রতম, সেখানে

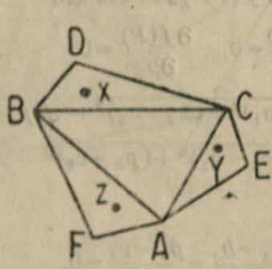
$$\left.\begin{array}{l}\cos\angle APB=-\frac{1}{2} \text{ এবং অনুরূপে} \\ \cos\angle APC=\cos\angle BPC=\frac{1}{2}\end{array}\right\}। \qquad \ldots \quad (3.137)$$

(3.137) প্রমাণিত করে যে $PA+PB-PC$ ক্ষুদ্রতম যখন হয় P বিন্দু A, B বা C বিন্দুতে অবস্থিত, কিম্বা AB বাহু P বিন্দুতে 120° কোণ উৎপন্ন করে, BC এবং CA উভয় বাহুই 60° কোণ উৎপন্ন করে। এরূপ শেষোক্ত অবস্থানে ফেরম্যাট্‌ বিন্দু F বা নেপোলিয়ন বিন্দু N মাত্র হতে পারে। এই অবস্থানে

$$f(N)=NA+NB-NC=-CC_1'=-|\delta'|।$$

(3.40 নং চিত্র দ্রষ্টব্য)। এখানে নেপোলিয়নের সঙ্গে যোগ রেখে N লিখেছি। সাধারণতঃ N নববিন্দু নির্দেশ করে। নববিন্দু অন্যত্র আলোচিত হবে।

7·2. আমরা এখানে নেপোলিয়ানের উপপাদ্যের আরও অধিক সামান্যীকরণ করতে পারি। যদি X, Y, Z যথাক্রমে সদৃশ ত্রিভুজগুলি DCB, CEA, BAF এর মধ্যে সদৃশরূপে অবস্থিত হয় এবং ত্রিভুজ তিনটি ABC ত্রিভুজের যথাক্রমে BC, CA, AB বাহুর উপর অঙ্কিত থাকে, তবে XYZ ত্রিভুজ DCB ইত্যাদি ত্রিভুজের সদৃশ। 3.42 নং চিত্র দ্রষ্টব্য।



3.42 নং চিত্র

আমরা A, B, C শীর্ষগুলিকে জটিল রাশি a, b, c দিয়ে এবং D, E, F-কে

d, e, f দিয়ে নির্দেশ করলাম। আমরা m_1, m_2, m_3 তিনটি বাস্তব রাশি পেতে পারি যা দিয়ে নীচের সম্বন্ধগুলি পেতে পারি :

$$\begin{aligned} &m_1+m_2+m_3=1, \\ &x=m_1d+m_2c+m_3b, \\ &y=m_1c+m_2e+m_3a, \\ &z=m_1b+m_2a+m_3f । \end{aligned} \qquad \ldots \quad (3.138)$$

যেহেতু MNP, QRS ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ যখনমাত্র

$$\begin{vmatrix} m & n & p \\ q & r & s \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0, \qquad \ldots \quad (3\cdot139)$$

সেইহেতু XYZ, BCD ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ যদিমাত্র

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ d & c & b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=m_1\begin{vmatrix} d & c & b \\ d & c & b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}+m_2\begin{vmatrix} c & e & a \\ d & c & b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}+m_3\begin{vmatrix} b & a & f \\ d & c & b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$=0+0+0$ সত্য হয়।

এখানে ধরা হয়েছে যে DCB, CEA সদৃশ।

7, 7·1, 7·2 অনুচ্ছেদগুলিতে যে আলোচনাগুলি হয়েছে সেগুলির বিস্তারিত বিবরণের জন্য ইদাইকাদার [36], নেলসন্ [37], ওয়াকার [38], সারফুন্কেল্ ও স্টাল্ [39] এর প্রবন্ধগুলির উল্লেখ করা হল।

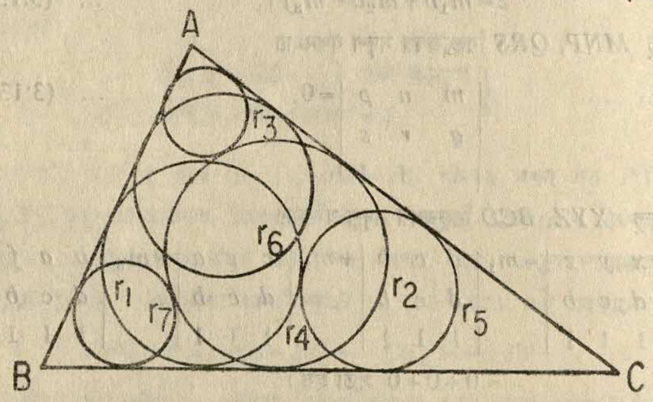
8. ত্রিভুজ, জ্যামিতির অনেক উপপাদ্যের খোরাক। নীচে ত্রিভুজের যে ধর্ম আলোচনা করব সেটি একটু কঠিন হলেও কৌতূহল জাগাবে কারণ জানবার জন্য। 3.43 নং চিত্র দ্রষ্টব্য।

ABC নির্দিষ্ট ত্রিভুজ। Γ_1 বৃত্ত BA, BC-কে স্পর্শ করে থাকা হল। Γ_2 বৃত্ত CB, CA বাহু এবং Γ_1 বৃত্তকে স্পর্শ করে, Γ_3 বৃত্ত AC, AB বাহুদ্বয়কে এবং Γ_2 বৃত্তকে স্পর্শ করে। অনুরূপ Γ_4 বৃত্ত BA, BC বাহুদ্বয়কে এবং Γ_3 বৃত্তকে Γ_3 বৃত্তকে স্পর্শ করে ইত্যাদি। এখন প্রমাণিত হবে যে $\Gamma_7=\Gamma_1$। ধরা যাক Γ_1, Γ_2 বৃত্ত দুইটির যথাক্রমে ব্যাসার্ধ q, r। যেহেতু Γ_1, Γ_2 উভয়কে স্পর্শ করে ও $\angle B$ কোণের অন্তর্বিষণ্ডক Γ_1 বৃত্তের কেন্দ্রগামী রেখা এবং C কোণের অন্তর্বিষণ্ডক Γ_2 বৃত্তের কেন্দ্রগামী

$$a=q\cot\frac{B}{2}+2\sqrt{qr}+r\cot\frac{C}{2}, \quad \ldots \qquad \ldots \quad (3.140)$$

যেখানে $a = BC$ বাহু, কারণ Γ_1, Γ_3 বৃত্ত দুইটির কেন্দ্রগুলির দূরত্বের BC-এর উপর প্রক্ষেপ $\sqrt{(q+r)^2-(q-r)^2} = 2\sqrt{qr}$। ধরি $s = \frac{a+b+c}{2}$। অতএব

$$\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}} \times \sqrt{\frac{(s-b)(s-a)}{s(s-c)}} = \frac{s-a}{s} \quad \ldots \quad (3.141)$$



2.43 নং চিত্র

যদি $q = s\sin^2\phi\tan\frac{B}{2}$, $r = \sin^2\psi\tan\frac{C}{2}$ ধরি (যেহেতু q, r উভয়েই a বাহু হতে ক্ষুদ্রতর),

$$\sqrt{qr} = \sqrt{s(s-a)}\sin\phi\sin\psi \quad \ldots \quad \ldots \quad (3.142)$$

সুতরাং (3.140) হতে পাই

$$a = s\sin^2\phi + 2\sqrt{s(s-a)}\sin\phi\sin\psi + s\sin^2\psi$$

অর্থাৎ $\frac{a}{s} = \sin^2\phi + 2\sqrt{1-\frac{a}{s}}\sin\phi\sin\psi + \sin^2\psi$

বা $\frac{a}{s} = \left\{\sin\phi + \sqrt{\left(1-\frac{a}{s}\right)}\sin\psi\right\}^2 + \frac{a}{s}\sin^2\psi$

অর্থাৎ $\sqrt{\frac{a}{s}}\cos\psi = \sin\phi + \sqrt{1-\frac{a}{s}}\sin\psi \quad \ldots \quad (3.143)$

ϕ, ψ সূক্ষ্মকোণ ধরে ধনাত্মক চিহ্নই বর্গমূলে গ্রহণযোগ্য। ধরি

$$\sqrt{\frac{a}{s}} = \sin\alpha \quad \ldots \quad \ldots \quad (3.144)$$

(3.143) এবং (3.144) হতে

$\sin\phi = \sin(\alpha - \psi)$ অর্থাৎ $\phi = \alpha - \psi$ বা $\phi = \pi - (\alpha - \psi)$ ।

যদি $\phi = \pi + \psi - \alpha$ ধরি $\sin(\phi + \alpha) = -\sin\psi$, ঋণাত্মক সংখ্যা যা সম্ভব নয় কারণ $\phi + \alpha < \pi$ । কাজেই গ্রহণীয়

$$\phi = \alpha - \psi \qquad \ldots \qquad \ldots \quad (3.145)$$

অনুরূপভাবে Γ_2, Γ_3 বৃত্তগুলি নিয়ে $\psi + \theta = \beta$, Γ_3, Γ_4 বৃত্তগুলি নিয়ে $\theta + \phi_1 = \gamma$, Γ_4, Γ_5 বৃত্তগুলি নিয়ে $\phi_1 + \psi_1 = \alpha$, Γ_5, Γ_6 বৃত্তগুলি নিয়ে $\psi_1 + \theta_1 = \beta$, Γ_6, Γ_7 বৃত্তগুলির জন্য $\theta_1 + \phi_2 = \gamma$ । উপরের সম্বন্ধগুলি সাজিয়ে লিখলে

$$\phi + \psi = \alpha, -\psi_1 - \theta = -\beta, \theta + \phi_1 = \gamma, -\phi - \psi_1 = -\alpha, \psi_1 + \theta_1 = \beta, -\theta_2 - \phi_2 = -\gamma \qquad \ldots \quad (3.146)$$

(3.146) এর সম্বন্ধগুলি যোগ করে পাই

$$\phi - \phi_2 = 0$$

অর্থাৎ $\Gamma_7 = \Gamma_1$ । (3.146) এর সম্বন্ধগুলি হতে এখন বুঝতে পারা যায় যে ছয়টি বৃত্ত অঙ্কনের পরে বৃত্তগুলির পুনরাবৃত্তি ঘটে কেন ।

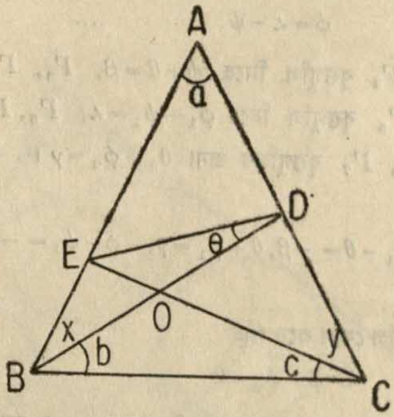
ইহা লক্ষ্যণীয় যে $\sin^2\phi = \left(q \cot \frac{B}{2}\right) / s < 1$ অর্থাৎ q ব্যাসার্ধকে পরিসীমিত করে। ইহার অর্থ Γ_1 বৃত্তের ব্যাসার্ধের উপর নিষেধ আরোপিত হল। বিস্তারিত আলোচনার জন্য ম্যাক্সওয়েলের [80] প্রবন্ধের উল্লেখ করা হল।

9. পূর্বেই উল্লেখ করা হয়েছে যে ত্রিভুজের ন্যায় অন্য কোন চিত্র জ্যামিতির এত দৃষ্টি আকর্ষণ করে নাই। এখন আর একটি সর্বকালের প্রিয় ত্রিভুজের সহিত যুক্ত খেলার জ্যামিতির দিকে নির্দেশ করব। এই খেলা বা প্রশ্নকে ত্রিভুজের অতিরিক্ত আগত কোণের খেলা বা প্রশ্ন বলব। এই খেলা চতুর্ভুজের ক্ষেত্রেও সম্প্রসারিত করা যেতে পারে। প্রশ্নের সমাধানের সঙ্গে ডায়োফ্যান্টাইন সমীকরণের যোগ থাকায় প্রশ্নের নানারূপ সম্ভাবনা আছে। কাজেই প্রশ্নের চিরন্তনী রূপ বিরাজ করছে।

ABC একটি নির্দিষ্ট সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ। $AB = AC$ । BD, CE রেখাদ্বয় এমনভাবে টানা হল যে D, E বিন্দুগুলি বিপরীত শীর্ষগুলির বাহুগুলির উপর অবস্থিত। ED যোগ করা হল। যদি $\angle DBC$ কোণ $= b$, $\angle ECB$ কোণ $= c$

$\angle EDB$ কোণ $=\theta$, $\angle BAC$ কোণ $=a$ নির্দেশ করি, তবে প্রশ্ন যে a, b, c, θ ডিগ্রীতে প্রকাশ করলে কোন কোন ক্ষেত্রে পূর্ণসংখ্যাক ডিগ্রী মানের হবে।

3.44 নং চিত্র দ্রষ্টব্য। ধরা যাক $\angle ABD = x$, $\angle ECD = y$।



3.44 নং চিত্র

সুতরাং $b+x=c+y$ এবং $x+b+c+y+a=\pi$ ... (3.147)

(3.147) হতে $x-y=c-b$, $x+y=\pi-(a+b+c)$

অর্থাৎ $x=\frac{1}{2}(\pi-a-2b)$, $y=\frac{1}{2}(\pi-a-2c)$। ... (3.148)

EOD ত্রিভুজ হতে $\dfrac{EO}{DO}=\dfrac{\sin\theta}{\sin(b+c-\theta)}$ ... ... (3.149)

পুনরায় $\dfrac{EO}{DO}=\dfrac{EO}{BO}\cdot\dfrac{BO}{CO}\cdot\dfrac{CO}{DO}$

$$=\frac{\cos\left(\frac{a}{2}+b\right)}{\cos\left(\frac{a}{2}-c\right)}\cdot\frac{\sin c}{\sin b}\cdot\frac{\cos\left(b-\frac{a}{2}\right)}{\cos\left(c+\frac{a}{2}\right)} \quad \dots \quad (3.150)$$

(3.149) ও (3.150) হতে পাই

$$\frac{\sin\theta}{\sin(b+c-\theta)}=\frac{\cos\left(\frac{a}{2}+b\right)\sin c\cos\left(b-\frac{a}{2}\right)}{\cos\left(\frac{a}{2}-c\right)\sin b\cos\left(c+\frac{a}{2}\right)} \quad \dots \quad (3.151)$$

$$\text{অর্থাৎ } \sin(b+c)\cot\theta - \cos(b+c) = \frac{\cos\left(\frac{a}{2}-c\right)\sin b\cos\left(\frac{a}{2}+c\right)}{\cos\left(\frac{a}{2}+b\right)\sin c\cos\left(b-\frac{a}{2}\right)} \quad \ldots (3\cdot152)$$

(3·152) কে ভিন্নরূপে সাজিয়ে লেখা যায়

$$\tan\theta = \frac{\sin(b+c)\sin c(\cos 2b+\cos a)}{\sin b(\cos a+\cos 2c)+\cos(b+c)\sin c(\cos a+\cos 2b)} \quad \ldots (3\cdot153)$$

বিশেষ ত্রয়ী $a=20°$, $b=60°$, $c=50°$ এবং $\theta=30°$ যে একটি অতিরিক্ত সমাধান তা (3·153) হতে সত্য প্রমাণিত করা যায়, যেহেতু (3·153) এর ডান দিকে

$$\frac{\sin 80°}{2.\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 10°} = \frac{1}{\sqrt{3}} \tan 30° ।$$

কিন্তু এরূপ θ অনুসারী ত্রয়ী a, b, c এর অনুসন্ধান কোন বিশিষ্ট প্রণালীতে করা দরকার।

উপপাদ্য : 14টি ত্রয়ী $\left(a, 45°+\frac{a}{4}, a\right)$ এবং $\theta=\frac{a}{2}$ যেখানে a এর মান $4°, 8°, 12°, \ldots, 56°$ এবং ইহাদের আবৃত্ত পূরক মোট 28টির মধ্যে $a=36°$ হলে নিজেই নিজের আবৃত্ত পূরক হওয়াতে 27টি অতিরিক্ত এরূপ সমাধান পাওয়া যাবে।

প্রমাণ : যখন $b=45°+\frac{a}{4}$ এবং $c=a$ তবে $\angle EBC=\frac{\pi}{2}-\frac{a}{2}$ এবং

$\angle BEC=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{a}{2}\right)-a=\frac{\pi}{2}-\frac{a}{2}$ অর্থাৎ $EC=BC$ । পুনরায়

$\angle BDE=\pi-\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{4}\right)-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{a}{2}\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{a}{4}$ । কাজেই $DC=BC$ । 3·44 নং চিত্র দ্রষ্টব্য। যেহেতু ECD ত্রিভুজের $DC=EC$ উভয়েই BC এর সমান হওয়াতে,

$\angle EDC=\frac{1}{2}\left\{\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{a}{2}\right)+a\right\}$

অর্থাৎ $\angle EDC=\frac{\pi}{4}+\frac{3a}{4}$ । $\angle BDC=\pi-\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{4}\right)-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{a}{2}\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{a}{4}$ ।

কাজেই $\theta=\angle EDB=\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3a}{4}\right)-\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{4}\right)=\frac{a}{2}$ । যেহেতু $45°+\frac{a}{4}$ কে পূর্ণ-

সংখ্যা হতে হবে, a রাশিকে 4 এর কোন গুণিতক হতে হবে। b কোণের সীমা $b<\frac{\pi}{2}-\frac{a}{2}$ দ্বারা নির্দিষ্ট হওয়ায় এক্ষেত্রে

$$\frac{\pi}{4}+\frac{a}{4}<\frac{\pi}{2}-\frac{a}{2} \text{ অর্থাৎ } a<60^\circ। \quad \ldots (3\cdot154)$$

কাজেই a কোণের মান 4°, 8°,...,56° হতে পারে মাত্র।

যদি (a, b, c, θ) এক্ষেত্রে $\left(a,\ 45^\circ+\frac{a}{4},\ a,\ \frac{a}{4}\right)$ হয়, আবৃত্ত পরিপূরক হবে $\left(a,\ 45^\circ+\frac{a}{4},\ 45^\circ+\frac{a}{4}-\frac{a}{2},\ 45^\circ+\frac{a}{4}-a\right)$ অর্থাৎ $\left(a,\ 45^\circ+\frac{a}{4},\ 45^\circ-\frac{a}{4},\ 45^\circ-\frac{3a}{4}\right)$। এই পরিপূরকও সমাধান কারণ (3·151) সম্বন্ধ। ইহা

$$\frac{\sin\theta}{\sin(b+c-\theta)}=\frac{\cos\left(b+\frac{a}{2}\right)\sin c\cos\left(b-\frac{a}{2}\right)}{\cos\left(c-\frac{a}{2}\right)\sin b\cos\left(c+\frac{a}{2}\right)}$$

যাকে পুনর্বিন্যাস করে লেখা যায়

$$\frac{\sin b}{\sin c}=\frac{\cos\left(b+\frac{a}{2}\right)\sin(b+c-\theta)\cos\left(b-\frac{a}{2}\right)}{\cos\left(c-\frac{a}{2}\right)\sin\theta\cos\left(c+\frac{a}{2}\right)} \ldots (3\cdot155)$$

(3·153) লক্ষ্য করলে পাওয়া যাবে যে $c=90^\circ-b$ হলে সেটি $\left(a,\ 45^\circ+\frac{a}{4},\ 45^\circ-\frac{a}{4},\ 45-\frac{3a}{4}\right)$ ডায়োফ্যান্টাইন সমীকরণের সমাধান হবে। পরে অন্য জ্যামিতিক ধর্মের সাহায্যে ডায়োফ্যান্টাইন সমীকরণটির সমাধান আলোচনা করা হবে। উপরের সমাধানগুলি সারণীর আকারে নীচে লেখা হল ঃ

X_1 : 4, 46, 4, 2 ;	Y_1 : 4, 46, 44, 42
X_2 : 8, 47, 8, 4 ;	Y_2 : 8, 47, 43, 39
X_3 : 12, 48, 12, 6 ;	Y_3 : 12, 48, 42, 36
... ...	... ...
... ...	... ...
X_9 : 36, 54, 36, 18 ;	Y_9 : 36, 54, 36, 18
... ...	... ...
X_{14} : 56, 59, 56 28 ;	Y_{14} : 56, 59, 31, 3

... (3·156)

(3·156) সারণীটি 27টি সমাধান দিয়েছে। $a=36$ অনুসারী জোড়া X_9, Y_9 এক হওয়াতে 28টি হতে একটি সমাধান কম হয়েছে। কিন্তু উপরের প্রণালীতে 20টি সমাধান সন্দেহের ফাঁকে চাপা পড়ে আছে। উদাহরণস্বরূপ নীচের সেটগুলি পরীক্ষা করে দেখা যেতে পারে :

$$(12, 57, 33, 15). \quad (12, 69, 21, 3)$$
$$(20, 60, 50, 30), \quad (72, 48, 42, 24) \text{।} \quad \ldots (3\cdot157)$$

এই সেটগুলির অধিকাংশই নীচের সূত্রগুলি হতে পাওয়া গিয়েছে :

$$\cos 36^\circ = \tfrac{1}{2} + \sin 18^\circ \text{ যেহেতু } \sin 18^\circ = \tfrac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$$

এবং $\cos 36^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$। অতএব $\cos 36^\circ - \sin 18^\circ = \frac{1}{2}$।

(3·157) এর কোন একটি সেট, যেমন (72, 48, 42, 24) বেছে নিলাম। আমরা প্রমাণ করি প্রথমে যে

$$\tan 24^\circ = \tan 6^\circ \tan 42^\circ \tan 78^\circ$$

বা

$$\tan 24^\circ \tan 48^\circ = \tan 6^\circ \tan 78^\circ \quad \ldots (3\cdot158)$$

যোগক্রিয়া এবং ভাগক্রিয়া প্রয়োগে

$$\frac{\sin 24^\circ \sin 48^\circ}{\cos 24^\circ \cos 84^\circ} = \frac{\sin 6^\circ \sin 78^\circ}{\cos 6^\circ \cos 78^\circ} \quad \ldots (3\cdot159)$$

সম্বন্ধটি হতে পাই

$$\frac{\cos 24^\circ}{\cos 72^\circ} = \frac{\cos 72^\circ}{\cos 48^\circ} \text{ অর্থাৎ } 2\cos 24^\circ \cos 48^\circ = 2\cos^2 72^\circ \text{।}$$

অতএব

$$\cos 108^\circ + \tfrac{1}{2} = 1 + \cos 144^\circ \text{ অর্থাৎ } \tfrac{1}{2}\sin 18^\circ = \cos 36^\circ \text{।}$$

একটি দ্বিতীয় সেট (12, 57, 33, 15) পরের উদাহরণস্বরূপ নেওয়া হল। প্রমাণ করতে হবে যে

$$\tan 15^\circ = \tan 27^\circ \tan 33^\circ \tan 39^\circ$$

অর্থাৎ $\tan 15^\circ \tan 51^\circ = \tan 27^\circ \tan 33^\circ$। ইহার সমার্থক সম্বন্ধ

$$\frac{\sin 15^\circ \sin 51^\circ}{\cos 15^\circ \cos 51^\circ} = \frac{\sin 27^\circ \sin 33^\circ}{\cos 27^\circ \cos 33^\circ}$$

ইহার উপর যোগক্রিয়া এবং ভাগক্রিয়া প্রয়োগে পাই

$$\frac{\cos 66^\circ}{\cos 36^\circ} = \frac{\cos 60^\circ}{\cos 6^\circ} \text{ অর্থাৎ } \cos 6^\circ \cos 66^\circ = \frac{1}{2}\cos 36^\circ \text{।}$$

অতএব

$$\tfrac{1}{2}\cos 60° + \tfrac{1}{2}\cos 72° = \tfrac{1}{2}\cos 36° \text{ অর্থাৎ } \tfrac{1}{2} + \sin 18° = \cos 36°\text{।}$$

এখন পরের প্রশ্ন মনে জাগে যে কোন প্রণালীতে এক সেট সমাধান পাওয়ার পর অনুসারী আর একটি সেট কিরূপে পাওয়া যেতে পারে। (3.155) কে সাজিয়ে পুনর্বিন্যাস করলে পাই

$$\sin b \sin c \sin (b-\theta) - \cos^2\left(\frac{a}{2}\right) \sin (c-\theta) = 0 \qquad (3.160)$$

$x = -b,\ y = c,\ z = b - \theta$ লিখে (3.160) হতে

$$\sin x \sin y \sin z + \cos^2 \frac{a}{2} \sin (x+y+z) = 0$$

অর্থাৎ $\sin(-x+y+z) + \sin(x-y+z) + \sin(x+y+z) +$

$$\sin(x+y+z) + \sin(x+y+z-a) + \sin(x+y+z+a) = 0 \qquad (3.161)$$

অতএব যখন (a, b, c, θ) কোন সমাধান সেট পাওয়া হয়েছে, তবে নীচের সূত্র অনুসারে অন্য সমাধানের সেট পাওয়া যাবে :

	শর্ত	b'	c'	θ'
(1)	$b = a + c + \theta$	$45° + \frac{a}{4} + \frac{c}{2}$	b	$\frac{b}{2} + \frac{c}{2} - \frac{\theta}{2}$
(2)	$a + b = c + \theta$	$\begin{cases} b \\ 90° + \frac{a}{2} - \theta \end{cases}$	$\begin{cases} b - \theta \\ b \end{cases}$	$\begin{cases} b - c \\ c - \theta \end{cases}$
(3)	$\theta + 180° = 2b + c$	c	$b + \frac{a}{2} + c - 90°$	$90° - b + \frac{a}{2}$
(4)	$2b = a + \theta$	$45° + \frac{\theta}{4}$	c	$\frac{\theta}{2}$
(5)	$a + b = c + \theta$	$45° - \frac{a}{4} + \frac{c}{2}$	b	$\frac{b}{2} + \frac{c}{2} - \frac{\theta}{2}$

... (3.162)

কিছু ব্যাখ্যা দেওয়া দরকার। (1) নম্বর শর্ত $y' = z - a$-এর সমার্থক। ধরা যাক $y' = -x$। এক্ষেত্রে (3.161) হত $y' = \frac{a}{2} + \frac{\pi}{2}$ এবং $b' = c = \frac{c}{2} + \frac{c}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{a}{4} + \frac{c}{2}$। অনুরূপে $c' = b$। y-কে $(z-a)$ তে পরিবর্তিত করলে এবং x-কে $(z+a)$-তে পরিবর্তিত করলে যেহেতু (3.161) রাশি অপরিবর্তিত থাকে, $\theta' = \frac{b}{2} + \frac{c}{2} - \frac{\theta}{2}$ নেওয়া যেতে পারে।

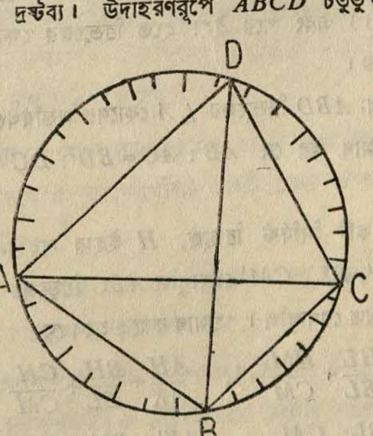
অনুরূপে (3.162) এর অন্যান্য সূত্রগুলি পাওয়া যাবে। এখন আমরা কয়েক সেট অতিরিক্ত কোণের সমাধান লিখতে সমর্থ।

	a	b	c	θ
X_1 :	12	57	33	15
X_2 :	12	69	21	3
X_3 :	72	48	42	24
X_4 :	72	51	39	9
X_1' :	12	57	42	24
X_2' :	12	69	66	48
X_3' :	72	48	24	6
X_4' :	72	51	42	12

	a	b	c	θ
Y_1 :	12	42	18	12
Y_2 :	12	66	42	6
Y_3 :	12	72	42	6
Y_4 :	72	39	21	12
Y_5 :	72	42	24	12
Y_6 :	120	24	12	6
Y_1' :	12	42	30	24
Y_2' :	12	66	54	24
Y_3' :	12	72	66	30
Y_4' :	72	39	27	18
Y_5' ;	72	42	30	18
Y_6' :	120	24	18	12

(3·163)

9·1. কিন্তু চতুর্ভুজে অতিরিক্ত পূর্ণসংখ্যক কোণের প্রশ্নের সমাধান সহজতর। প্রথমে একটি বৃত্ত নিয়ে তার পরিধিকে ডিগ্রি কোণ নির্দেশক অংশে ভাগ করা হল। 3.45 নং চিত্র দ্রষ্টব্য। উদাহরণরূপে $ABCD$ চতুর্ভুজটি নেওয়া হল।



3.45 নং চিত্র

BD, AC যোগ করা হল। $\angle ADC = \angle ADB + \angle BDC$ = ডিগ্রিমাপে পূর্ণসংখ্যক মানের। কাজেই $\angle ABC$ কোণ ডিগ্রিতে পূর্ণসংখ্যাজ্ঞাপক। অনুরূপে $\angle BAD$, $\angle BCD$ কোণ দুইটিও পূর্ণসখ্যায় পাওয়া যায়। অতএব অতিরিক্ত সমাধান কোণগুলি নিম্নলিখিত জ্যামিতিক কারণ হতে পাওয়া সহজ

(1) সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ধর্ম ব্যবহার

(2) বৃত্তস্থ চর্তুভুজের ধর্ম ব্যবহার।

ত্রিভুজের সম্বন্ধে নানা উপপাদ্য ও ধর্মের আলোচনা এখানেই স্থগিত হল। শেষে প্রশ্নের মধ্যে আরও কিছু নতুন জ্ঞাতব্য ধর্ম থাকতে পারে। 9, 9·1 অনুচ্ছেদের অংশের বিস্তারিত আলোচনার জন্য ট্রিপ্ [41], রিগ্বী [42] এর প্রবন্ধগুলির উল্লেখ করা হল।

প্রশ্নমালা

1. ষড়ভুজের ক্ষেত্রে সামান্যীকৃত এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্যের জ্যামিতিক চিত্র আঁকা জ্যামিতিক চিত্রে $S^2 = 5^2 \cdot BC^2$ অন্তর্ভুক্ত করে BC-এর জ্যামিতিক রেখা দেখাও।

2. যদি A, B, C তিনটি সমরেখ বিন্দু হয় এবং D অপর যে কোন বিন্দু, প্রথমে দেখাও যে $DA^2 \cdot BC + DB^2 \cdot CA + DC^2 \cdot AB = AB \cdot BC \cdot CA$ (ষ্টুয়ার্টের উপপাদ্য) এবং পরে ইহা হতে ত্রিভুজের ক্ষেত্রে এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য প্রমাণ কর।

3. AD রেখা ABD ত্রিভুজের $\angle A$ কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক। ABD ত্রিভুজের পরিবৃত্ত এ'কে প্রমাণ কর যে $AB : AC = BD : DC$ (কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক উপপাদ্য)।

4. ABC একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজ, H ইহার লম্ববিন্দু, AK, BL, CM লম্বরেখাগুলি, AK', BL', CM' রেখাগুলি ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্ত পর্যন্ত AK, BL, CM এর বর্ধিত রেখাগুলি। প্রমাণ করতে হবে যে,

$$\frac{HK}{AK}+\frac{HL}{BL}+\frac{HM}{CM}=1, \quad \frac{AH}{AK}+\frac{BH}{BL}+\frac{CH}{CM}=2,$$

$$\frac{AK}{AK}+\frac{BL}{BL}+\frac{CM}{CM}=3, \quad \frac{AK'}{AK}+\frac{BL'}{BL}+\frac{CM'}{CM}=4।$$

5. ত্রিকোণমিতির সাহায্যে b^2, c^2 এর পরিবর্তে a^2, b^2 হতে শুরু করে টলেমির উপপাদ্য প্রমাণ কর।

6. প্রমাণ কর যে তিনটি রেখা PP', QQ', RR' (3.20 নং চিত্র) সমবিন্দু। অন্য কথা ব্যবহার করলে, ABC ত্রিভুজের $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ কোণের ত্রিখণ্ডকগুলি পুনরায় ছেদ করে অপর একটি ত্রিভুজ $P'Q'R'$ সৃষ্টি করে এবং $P'Q'R'$ ত্রিভুজ, সমবাহু ত্রিভুজ PQR হতে দৃষ্টি প্রসারিত করে পাওয়া যাবে।

7. α, β, γ যথাক্রমে P বিন্দুর A, B, C শীর্ষগুলির দূরত্ব। α, β, γ এর কোন কোন মানের জন্য ABC ত্রিভুজ (i) সমবাহু (ii) সমদ্বিবাহু (iii) সমকোণী এবং সমদ্বিবাহু ? প্রত্যেক ক্ষেত্রে জ্যামিতিক চিত্র আঁক।

8. ABC নির্দিষ্ট ত্রিভুজের $\angle B$, $\angle C$ কোণদুটির অন্তর্দ্বিখণ্ডকদ্বয় বর্ধিত করলে ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তকে যথাক্রমে Q, R বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে $PB = AC$ সম্বন্ধ $BQ = CR$ এর সমার্থক। কিন্তু $BQ = CR$ সম্বন্ধ $AB = AC$ এর সমার্থক নহে।

9. যে কোন সমদৈর্ঘ্যের অন্তর্দ্বিখণ্ডকের উপর বৃত্ত আঁক যাতে বৃত্তচাপে অদ্বিখণ্ডিত কোণটি অবস্থিত থাকে এবং স্টাইনার-লেমাস্ উপপাদ্যটি প্রমাণ কর।

10. 3.22 নং চিত্রের প্রশ্নের ত্রিকোণমিতিক সমাধান দিতে হবে।

11. যখন ABC ত্রিভুজের $\angle A > 120°$ বা কোন উত্তল চতুষ্কোণ $ABCD$ এর ক্ষেত্রে ফেরম্যাট্ উপপাদ্য প্রমাণ কর।

12. যদি P, P' দুইটি বিন্দু ABC ত্রিভুজের অন্তঃস্থিত হয়ে এমনভাবে অবস্থান করে যে $\angle CBP = \angle PBP' = \angle P'BA$, $\angle ACP' = \angle P'CP = \angle PCB$, তবে প্রমাণ কর যে $\angle BP'P = \angle PP'C$।

13. প্রমাণ কর যদি যে কোন সামান্তরিকের চারটি বাহুর উপর বহির্দিকে চারটি বর্গক্ষেত্র আঁকা যায়, তবে ঐ বর্গক্ষেত্রগুলির চারটি কেন্দ্র অপর একটি বর্গক্ষেত্রের শীর্ষবিন্দুগুলি হবে।

14. যখন ABC ত্রিভুজের $\angle A$ কোণ স্থূলকোণ হয় তখন কিরূপে ঐ ত্রিভুজের মধ্যে ক্ষুদ্রতম পরিসীমার ত্রিভুজ অঙ্কিত করা যাবে ?

15. a দৈর্ঘ্যের বাহুবিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্রের শীর্ষবিন্দুগুলির উপর চারটি স্থানের অবস্থান। যদি কাহারও হাতে $(1 + \sqrt{3})\, a$ মাত্র দৈর্ঘ্যের রাস্তা তৈরী করবার অর্থ থাকে, তবে নির্ণয় কর কিরূপে ঐ স্থানগুলিকে রাস্তা দিয়ে যোগ করবে।

16. যদি ABC ত্রিভুজের a বাহু, bc ক্ষেত্রফল এবং $\angle B - \angle C$ অন্তরফল দেওয়া থাকে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।'

17. N নেপোলিয়নবিন্দু। প্রমাণ কর যে $ANBC_1'$ চতুর্ভুজ বৃত্তস্থ (3.40 নং চিত্র)।

18. 3.43 নং চিত্রে যখন $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3$ ঘটবে তখন চিত্রের জ্যামিতিক বৈশিষ্ট্য বর্ণনা কর।

19. ত্রিভুজের অতিরিক্ত কোণের সমাধানের জন্য বিকল্প ত্রিকোণমিতির সূত্র লিখ।

20. B' বিন্দুকে B শীর্ষের বিপরীতে অবস্থিত নিয়ে, L_1M_1 এর বৃহত্তম মান নির্ণয় কর। L_1M_1 অঙ্কনের আভাষ 3.34 নং চিত্রে পাওয়া যাবে।

21. ত্রিভুজের ভূমিসংলগ্ন কোণ দুইটি α, β এবং $\alpha > \beta$ ধরে নিয়ে প্রমাণ কর যে এরূপ মনন α, β এর অন্তর্দ্বিখণ্ডকের সমতার মননের বিরোধী এবং এইরূপে স্টাইনার-লমাস্ উপপাদ্য প্রমাণ কর।

22. যদি X, Y, Z বিন্দুগুলি যথাক্রমে DCB, CEA, BAF সদৃশ সমতলীয় ত্রিভুজগুলিতে সদৃশরূপে অবস্থিত হয় এবং ত্রিভুজগুলি ABC ত্রিভুজের তিনটি বাহুর সহিত যুক্ত, ইউক্লিডের প্রণালী প্রয়োগকরে প্রমাণ কর যে XYZ ত্রিভুজ ABC ত্রিভুজের সদৃশ।

23. ABC ত্রিভুজের $a+b$, $a+c$ এবং $\angle A$ কোণ দেওয়া থাকলে ABC ত্রিভুজ অঙ্কনের বিকল্প প্রণালীর জ্যামিতিক প্রমাণ দাও।

The seventh proposition is so fallacious that Euclid would have done better not to attempt a proof. In the first place it uses an undefined term in the enunciation, namely on the same side. The definition requires an axiom.

—Bertrand Russel.

গ্রন্থসূচী

1. রিগ্বী, জে. এফ্.—[1] 52 (1968) পৃঃ 152-153।
2. মে, এ. জে. ভি.—[1] 25 (1941) পৃঃ 228-229।
3. ডগ্লাস্, এ. জে.—[1] 65 (1981) পৃঃ 19-22।

4. হুইলার, আর্. এফ্.—[1] 47 (1963) পৃঃ 156-157।
5. বেল্, জে.—[1] 43 (1959) পৃঃ 156-157।
6. সিলিটো, এ. জি.—[1] 50 (1966) পৃঃ 388।
7. কোক্সিটার, এইচ্. এস্. এম্.—Introduction to Geometry (ওয়াইলে) (1962)।
8. হান্টার, ই. এম্.—[1] 53 (1969) পৃঃ 159—160।
9. লয়েড্, এইচ.—[1] 53 (1969) পৃঃ 59।
10. পার্গেটার্, এ. আর্.—[1] 55 (1971) পৃঃ 58।
11. সিন্নাদুরাই, জে. সেন্ট. সি. এস্.—[1] 46 (1962) পৃঃ 143-144।
12. প্যারী, সি. এফ্.—[1] 62 (1978) পৃঃ 89।
13. 12 নং সূচী—পৃঃ 89-94।
14. প্রিমরোজ্, ই. জে. এফ্—[1] 63 (1979) পৃঃ 42-43।
15. ম্যাক্, সি.—[1] 52 (1968) পৃঃ 147-149।
16. গিলিস্, এ. ডব্লিউ—[1] 59 (1973) পৃ: 356-357।
17. চৌধুরী, এস্.—গণিতচর্চা 2 (1983) পৃঃ 78-79।
18. 7 নং সূচী।
19. ভেঙ্কটাচালিয়েঙ্গার, কে.—[2] 64 (1958) পৃঃ 612-613।
20. রীস্, সি. ই.—[1] 42 (1958) পৃঃ 315-316।
21. জন্সন্, আর. এ.—Modern Geometry।
22. ফোর্ডার্, এইচ্. জি.—[1] 53 (1969) পৃঃ 178।
23. ওক্লি, সি. ও. এবং বেকার, জে. সি.—[2] 85 (1978) পৃঃ 737-745।
24. কে, ডি. সি.—College Geometry (হোল্ট, রাইনহার্ট ও উইন্স্টন্ 1969)।
25. ক্লীভেন, ডি. জে.—[2] 85 (1978) পৃঃ 100-105।
26. বীচ্, এন্.—[1] 65 (1981) পৃঃ 34-36।
27. গেরফুঙ্কেল, জে.—[2] 77 (1970) পৃঃ 406-409।
28. 7 নং সূচী।
29. কুরকুফ্, ডব্লিউ. জে.—[1] 57 (1973) পৃঃ 46-51।
30. প্রাইস্, এইচ্. ই.—[1] 62 (1978) পৃঃ 198-200।
31. ফোর্ডার, এইচ্. জি.—Higher School Geometry (কেম্ব্রিজ)।

32. 7 নং সূচী।

33. লাওডেন, জি. এইচ .—[1] 66 (1982) পৃঃ 116-120।

34. টেস্টার, এইচ্. ই.—[1] 46 (1962) পৃঃ 52-54।

35. লিংবি, এ.—[1] 46 (1962) পৃঃ 135।

36. ইদাইক্কাদার, এন্. এম্. [1] 47 (1963) পৃঃ 143-145।

37. নেল্সন্, আর. ডি.—[1] 58 (1974) পৃঃ 108-116।

38. ওয়াকার্, এ. ডব্লিউ—[2] 79 (1972) পৃঃ 184-185।

39. গারফুঙ্কেল, জে. ও স্টাল্, এস্.—[21 72 (1965) পৃঃ 12-20।

40. ম্যাক্স্‌ওয়েল্, ই. এ.—[1] 55 (1971) পৃঃ 61-62।

41. ট্রিপ্, সি. ই.—[1] 59 (1975) পৃঃ 98-106।

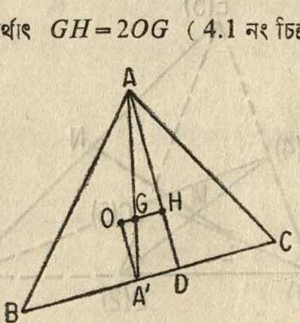
42. রিগবী, জি. এফ.—[1] 62 (1278) পৃঃ 183-191।

চতুর্থ পরিচ্ছেদ

সমরেখ রেখা, অয়েলার রেখা, অয়েলার রেখার সংশ্লিষ্ট আরও জ্যামিতি, সঞ্চার পথের গুরুত্বপূর্ণ ছেদবিন্দু ও ছেদবিন্দুর রাশিমালা।

ত্রিভুজের সঙ্গে জড়িত সুপরিচিত আছে সমবিন্দুগুলির মধ্যে ভরকেন্দ্র মধ্যমাগুলির সংযোগস্থল, পরিকেন্দ্র বাহুগুলির সমদ্বিখণ্ডকগুলির সমবিন্দু, অন্তঃকেন্দ্র কোণগুলির অন্তর্দ্বিখণ্ডকগুলির সংযোগস্থল, বহিঃকেন্দ্রগুলি একটির অন্তর্দ্বিখণ্ডক ও অপর দুইটি কোণের বহির্দ্বিখণ্ডকগুলির সমবিন্দু, লম্ববিন্দু শীর্ষবিন্দুগুলি হতে আপতিত লম্বগুলির সংযোগস্থল। লম্ববিন্দু নামটির সঙ্গে জড়িত আছে একটি গল্প। ইংলণ্ডের কেম্ব্রিজ সহরে তিনটি নিরিবিলি রাস্তা একটি বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। সেখানে অধ্যাপকেরা সাধারণতঃ বেড়াতে বেড়াতে মিলতেন। তাঁরা হঠাৎ একদিন লক্ষ্য করলেন যে ঐ মিলনবিন্দু তিনটি স্থানের অন্তঃসংযোগকারী পথের উপর লম্বগুলির সংযোগস্থল হতে পারে। তখন ঐ বিন্দুর নাম দেওয়া হল লম্ববিন্দু। আমরা এখন আরও অন্যান্য রেখার সমবিন্দু, ছেদবিন্দুগুলির সঞ্চারপথ ইত্যাদি আলোচনা করব। প্রথমেই অয়েলার রেখা নিশ্চতই বিবেচ্য। অয়েলার (1707খৃঃ-1783খৃঃ) সুইজারল্যাণ্ডে জন্মেছিলেন। কিন্তু জীবনের অধিকাংশ সময় তিনি রাশিয়া দেশে কাটিয়েছিলেন। গণিতের সমস্তদিকে অফুরন্ত আবিষ্কারে দান করে গিয়েছেন।

যদি ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ না হয়, তবে ইহার পরিকেন্দ্র O এবং ভরকেন্দ্র G দিয়ে একটি রেখা টানা সম্ভব। এই রেখার উপর H বিন্দুটি এমনভাবে নেওয়া হল যে $OH=3OG$ অর্থাৎ $GH=2OG$ (4.1 নং চিত্র দ্রষ্টব্য)। যেহেতু G

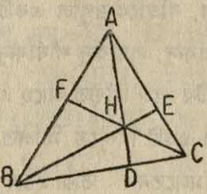


4.1 নং চিত্র

ভরকেন্দ্র $GA=2A'G$, AH রেখা $A'O$ এর সমান্তরাল। পুনরায় $A'O$ রেখা BC বাহুর সমদ্বিখণ্ডক। কাজেই AH রেখা BC বাহুর উপর লম্ব। অনুরূপ BH

রেখা AC বাহুর উপর এবং CH রেখা AB বাহুর উপর লম্ব। OG কে অয়েলার রেখা বলা হয় এবং ত্রিভুজের শীর্ষগুলি হতে বিপরীত বাহু গুলির উপর লম্বগুলি OG রেখার একই বিন্দু দিয়ে যায়। তিনটি লম্বের সাধারণ বিন্দু H ত্রিভুজের লম্ববিন্দু।

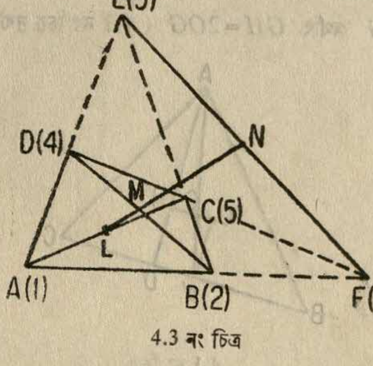
লম্ববিন্দুর ধর্ম হতে পরিস্ফুট হয়ে পড়ে যে যদি কোন চতুষ্কোণের বিপরীত জোড়া পরস্পর লম্ব হয় তবে অপর বাহুগুলিও পরস্পর লম্ব হবে (4.2 নং চিত্র দ্রষ্টব্য)।



4.2 নং চিত্র

$ABHC$ একটি পূর্ণ চতুষ্কোণ। এরূপ চতুষ্কোণকে লম্ববিন্দু চতুষ্কোণ বলা হয়। পুনরায় লম্ববিন্দু চতুষ্কোণের প্রত্যেকটি শীর্ষ অপর তিনটি শীর্ষ দিয়ে গঠিত ত্রিভুজের লম্ববিন্দু। বিস্তারিত আলোচনার জন্য কোক্সিটার [1] এর গ্রন্থের উল্লেখ করা হল।

1.1. পরের প্রশ্ন সম্পূর্ণ চতুর্ভুজের সঙ্গে যুক্ত। প্রমাণ করব যে কোন সম্পূর্ণ চতুর্ভুজের কর্ণগুলির মধ্যবিন্দুগুলি সমরেখ। 4.3 নং চিত্র দ্রষ্টব্য।



4.3 নং চিত্র

ধরা যাক $ABCD$ নির্দিষ্ট সম্পূর্ণ চতুর্ভুজ। A, B...ইত্যাদি বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক ধরা হল (x_1, y_1), (x_2, y_2)...ইত্যাদি। চিত্রে স্থানাঙ্কের প্রতীক সংখ্যার

নির্দেশ দেওয়া আছে। AC, BD, EF কর্ণ তিনটির মধ্যবিন্দুগুলি সমরেখ হওয়ার শর্ত

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1+x_3 & x_2+x_4 & x_5+x_6 \\ y_1+y_3 & y_2+y_4 & y_5+y_6 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \quad \ldots \quad (4.1)$$

এর মান শূন্য হবে। 145, 126, 346 ছকগুলির মান শূন্য কারণ (x_1, y_1), (x_4, y_4), (x_5, y_5) বিন্দুগুলি ADE রেখায় অবস্থিত, $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, (x_6, y_6) ABF রেখায় অবস্থিত এবং (x_3, y_3), (x_4, y_4), (x_6, y_6) DCF রেখার উপর অবস্থিত। কাজেই (4.1) হতে বাকী

$\pm(\triangle ABE + \triangle CBF - \triangle AFD - \triangle DCE)$ এর মান 4.3 নং চিত্র হতে স্পষ্টতঃই শূন্য পাই।

1.2 বজ্র অনুপাতের জ্যামিতিতে অপরিবর্তনীয়তা সুপরিচিত। ইহা একই বিন্দু-গামী সরলরেখাগুলির সঙ্গে যুক্ত। চারটি সরলরেখা $y = \lambda_i x$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ নেওয়া হল। যে কোন রেখা $ax + by + c = 0$ ইহাদের ভেদক। চারটি ভেদবিন্দুর x-স্থানাঙ্ক $x_i (i = 1, 2, 3, 4)$। তবে

$$\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = \frac{b(\lambda_1 - \lambda_2)}{c} \quad \ldots \quad (4.2)$$

অতএব

$$\frac{(x_1 - x_2)(x_3 - x_4)}{(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)} = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_4)}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)} \quad \ldots \quad (4.3)$$

(4.3) এর ডানদিক a, b, c নিরপেক্ষ হওয়ায় যে কোন ভেদকই (4.3) এর বজ্র-অনুপাত একই দিবে।

অনুরূপ উদাহরণ সরলরেখার পরিবর্তে বক্ররেখাতেও দেওয়া যেতে পারে ঃ যেমন ধরি সমীকরণ

$$axy + bx + cy + d = 0, \ ad \neq bc \quad \ldots \quad (4.4)$$

(4.4) কে সাজিয়ে

$$x + p = \frac{r}{y + q} \quad \ldots \quad (4.5)$$

(4.5) হতে

$$\frac{(x_1 - x_2)}{(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)} = \frac{y_2 - y_1}{(y_3 - y_1)(y_4 - y_2)} \cdot \frac{(y_3 + q)(y_4 + q)}{r}$$

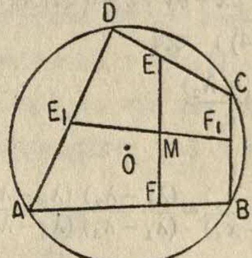
অর্থাৎ

$$\frac{(x_1-x_2)(x_3-x_4)}{(x_1-x_3)(x_2-x_4)} = \frac{(y_1-y_2)(y_3-y_4)}{(y_1-y_3)(y_2-y_4)} \quad \cdots \quad (4.6)$$

(4.6) এর বজ্র অনুপাত লক্ষ্যণীয়।

1.2. আমরা সমরেখ বিন্দুসকলের সম্পদ বা ধর্ম নিয়ে আলোচনা করছি। চতুর্ভুজের সঙ্গেও অয়েলার রেখার ন্যায় ধর্ম বা উপপাদ্য জড়িত আছে।

ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ (4.4 নং চিত্র দ্রষ্টব্য)। ইহার কেন্দ্র *O*। কোন বাহুর মধ্যবিন্দু হতে বিপরীত বাহুর উপর লম্বকে 'মধ্যোন্নতি' বলা হল। প্রমাণ করতে হবে যে বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের মধ্যোন্নতি কয়টি সমবিন্দু। এই বিন্দুকে *M* অভিহিত করলে এবং চতুর্ভুজের চারকোণে সমান ভর রাখলে যে ভরকেন্দ্র *G* পাওয়া যায় তা *OM* এর উপর অবস্থিত এবং *OM*কে *G* সমদ্বিখণ্ডিত করে। এই রেখাকে সামান্যীকৃত অয়েলার রেখা বলা চলে। আরও অতিরিক্ত ধর্ম প্রমাণ করতে হবে যে, কোন শীর্ষবিন্দুর অপেক্ষা বাকী তিনটি বৃত্তস্থ বিন্দুর ত্রিভুজের অপেক্ষসিমসন্ রেখা চারটি *M* বিন্দুগামী।



4.4 নং চিত্র

চতুর্ভুজের যে কোন তিনটি শীর্ষবিন্দু নিয়ে ত্রিভুজ এঁকে চারটি ত্রিভুজের নববিন্দুবৃত্তগুলি সকলেই *M* বিন্দুতে ছেদ করে। চতুর্ভুজের *A* শীর্ষবিন্দুর সঙ্গে *BCD* ত্রিভুজের লম্ববিন্দু যোগকারী রেখা *M* বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয় এবং অবশ্যই *M* বিন্দুগামী। অনুরূপ *B, C, D* শীর্ষ হতেও পাই।

এই সমস্ত ধর্ম প্রাথমিক জ্যামিতি সাহায্যে বেশ সহজেই প্রমাণ করা যায়। *M* কে চতুর্ভুজের একটি বিশেষ বিন্দু বলে মনে হবে। আমরা স্থানাঙ্ক জ্যামিতি ব্যবহার করা শ্রেয় মনে করে উপরোক্ত সরল ধর্মগুলির জন্য প্রমাণে অগ্রসর হব।

ABCD চতুর্ভুজের পরিবৃত্তের কেন্দ্র *O* কে মেরু স্থানাঙ্কের মূলবিন্দু ধরে নেওয়া হল। *A, B, C, D* বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক ধরা যাক যথাক্রমে $(R\cos\theta_1,\ R\sin$

θ_1), ($R\cos\theta_2$, $R\sin\theta_2$), ($R\cos\theta_3$, $R\sin\theta_3$), ($R\cos\theta_4$, $R\sin\theta_4$)। R বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ। কাজেই CD, DA এর মধ্যবিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক নিম্নরূপ ঃ

$$E\left\{R\frac{(\cos\theta_3+\cos\theta_4)}{2},\quad R\frac{(\sin\theta_3+\sin\theta_4)}{2}\right\}$$
$$E_1\left\{R\frac{(\cos\theta_4+\cos\theta_1)}{2},\quad R\frac{(\sin\theta_4+\sin\theta_1)}{2}\right\} \quad \dots \quad (4.7)$$

AB, BC রেখাগুলির সমীকরণ ঃ

$$AB:\quad \frac{x-R\cos_1}{\cos\theta_1-\cos\theta_2}=\frac{y-R\sin\theta_1}{(\sin\theta_1-\sin\theta_2)},$$
$$BC:\quad \frac{x-R\cos\theta_2}{\cos\theta_2-\cos\theta_3}=\frac{y-R\sin\theta_2}{\sin\theta_2-\sin\theta_3}\text{ ।} \quad \dots \quad (4.8)$$

E, E_1 মধ্যবিন্দুগামী AB, BC এর উপর লম্বরেখাগুলির যথাক্রম সমীকরণ ঃ

$$EF:\quad x(\cos\theta_2-\cos\theta_3)+y(\sin\theta_2-\sin\theta_3)=$$
$$\frac{R}{2}\{\cos(\theta_4-\theta_2)+\cos(\theta_1-\theta_2)-\cos(\theta_4-\theta_3)-\cos(\theta_1-\theta_3)\}$$
$$E_1F_1:\quad x(\cos\theta_1-\cos\theta_2)+y(\sin\theta_1-\sin\theta_2)=$$
$$\frac{R}{2}[\cos(\theta_1-\theta_3)+\cos(\theta_1-\theta_4)-\cos(\theta_3-\theta_2)-\cos(\theta_4-\theta_2)] \quad \dots \quad (4.9)$$

A, B, C, D শীর্ষগুলিতে সম-ওজন থাকলে ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক

$$G:\ \left\{R\frac{\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cos_3+\cos\theta_4}{4},\right.$$
$$\left.R\frac{\sin\theta_1+\sin\theta_2+\sin\theta_3+\sin\theta_4}{4}\right\} \quad \dots \quad (4.10)$$

EF এবং E_1F_1 এর ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক

$$M:\quad \left\{R\frac{\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cos\theta_3+\cos\theta_4}{2}.\right.$$
$$\left.R\frac{\sin\theta_1+\sin\theta_2+\sin\theta_3+\sin\theta_4}{2}\right\} \quad \dots \quad (4.11)$$

কাজেই OM যে অয়েলার রেখার ন্যায় তা প্রমাণিত হল।

পুনরায় AB রেখার সমীকরণ (4.8) হতে

$$x(\sin\theta_1-\sin\theta_2)-y(\cos\theta_1-\cos\theta_2)=R\sin(\theta_1-\theta_2) \quad \ldots (4\cdot12)$$

C বিন্দু দিয়ে AB এর লম্বরেখার সমীকরণ হবে

$$x(\cos\theta_1-\cos\theta_2)+y(\sin\theta_1-\sin\theta_2)$$
$$=R[\cos(\theta_1-\theta_3)-\cos(\theta_2-\theta_3)] \quad \ldots (4\cdot13)$$

(4·12) এবং (4·13) সরলীকৃত করলে দাঁড়ায়

$$x\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}-y\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}=R\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2} \quad \ldots (4\cdot14)$$

$$x\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}+y\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}=R\sin\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}-\theta_3\right) \ldots (4\cdot15)$$

(4·14), (4·15) হতে এদের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক

$$x_1=R(\sin\theta_1-\sin\theta_2)+R(\cos\theta_3-\cos(\theta_1+\theta_2-\theta_3)),$$
$$y_1=R(\sin(\theta_1+\theta_2-\theta_3)+\sin\theta_3)-R(\cos\theta_2-\cos\theta_1)\text{।} \quad \ldots (4\cdot16)$$

(4·16) কে সাজিয়ে লিখলে

$$x_1=R(\sin\theta_1-\sin\theta_2+\cos\theta_3-\cos(\theta_1+\theta_2-\theta_3)),$$
$$y_1=R(\cos\theta_1-\cos\theta_2+\sin\theta_3-\sin(\theta_1+\theta_2-\theta_3))\text{।} \quad \ldots (4\cdot17)$$

4·17, C বিন্দু হতে AB এর উপর লম্বপাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক দিয়েছে। একইরূপে C বিন্দু হতে BD এর উপর লম্বপাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক পাই

$$x_2=R(\sin\theta_2-\sin\theta_4+\cos\theta_3-\cos(\theta_2+\theta_4-\theta_3)),$$
$$y_2=R(\cos\theta_2-\cos\theta_4+\sin\theta_3-\sin(\theta_2+\theta_4-\theta_3)) \quad \ldots (4\cdot18)$$

এবং C বিন্দু হতে DA এর উপর লম্বপাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক

$$x_3=R(\sin\theta_4-\sin\theta_1+\cos\theta_3-\cos(\theta_4+\theta_1-\theta_3)),$$
$$y_3=R(\cos\theta_4-\cos\theta_1+\cos\theta_3-\cos(\theta_4+\theta_1-\theta_3))\text{।} \quad \ldots (4\cdot19)$$

(x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) দিয়ে সরলরেখার সমীকরণ

$$(x-x_1)(\cos\theta_1-2\cos\theta_2+\cos\theta_4-\sin(\theta_1+\theta_2-\theta_3)$$
$$+\sin(\theta_2+\theta_4-\theta_3))$$
$$-(y-y_1)(\sin\theta_1-2\sin\theta_2+\sin\theta_4-\cos(\theta_1+\theta_2-\theta_3)$$
$$+(\cos\theta_2+\theta_4-\theta_3))=0 \quad \ldots (4\cdot20)$$

(4·11) হতে M বিন্দুর স্থানাঙ্ক (4·20) তে বসিয়ে পাই

$$\left(\frac{\cos\theta_1+\cos\theta_2-\cos\theta_3+\cos_4}{2}-\sin\theta_1+\sin\theta_2\right.$$
$$+\cos(\theta_1+\theta_2-\theta_3)).$$

$$(\cos\theta_1+2\cos\theta_2+\cos\theta_4-\sin(\theta_1+\theta_2-\theta_3)+\sin(\theta_2+\theta_4-\theta_3))$$

$$-\left(\frac{\sin\theta_1+\sin\theta_2-\sin\theta_3+\sin\theta_4}{2}-\cos\theta_1+\cos\theta_2\right.$$

$$\left.+\sin(\theta_1+\theta_2-\theta_2)\right).$$

$$(\sin\theta_1-2\sin\theta_2+\sin\theta_4-\cos(\theta_1+\theta_2-\theta_3)+$$

$$\cos(\theta_2+\theta_4-\theta_3))=0 \quad \ldots \quad (4\cdot21)$$

অর্থাৎ M বিন্দু BAD ত্রিভুজের C অপেক্ষা সিম্‌সন্ রেখার উপর অবস্থিত। চারটি বিন্দুর অপেক্ষা অপর তিনটি বিন্দুর ত্রিভুজগুলির সিম্‌সন্ রেখাগুলি M বিন্দুতে ছেদ করে।

অপর সিদ্ধান্তগুলি এখন বিশ্লেষণ করে দেখান যাবে। প্রথমে BCD ত্রিভুজ বেছে নেওয়া হল। BC, CD, DB বাহুগুলির যথাক্রম মধ্যবিন্দুগুলি D', B', C' এর স্থানাঙ্কগুলি ঃ

$$D' : \left\{\frac{R}{2}(\cos\theta_2+\cos\theta_3), \frac{R}{2}(\sin\theta_2+\sin\theta_3)\right\},$$

$$B' : \left\{\frac{R}{2}(\cos\theta_3+\cos\theta_4), \frac{R}{2}(\sin\theta_3+\sin\theta_4)\right\}, \ldots \quad (4\cdot22)$$

$$C' ; \left\{\frac{R}{2}(\cos\theta_4+\cos\theta_2), \frac{R}{2}(\sin\theta_4+\sin\theta_2)\right\}।$$

N_1 বিন্দুর স্থানাঙ্ক আমরা নীচের ন্যায় কল্পনা করলাম ঃ

$$N_1 : \left\{\frac{R}{2}(\cos\theta_2+\cos\theta_3+\cos\theta_4),\right.$$

$$\left.\frac{R}{2}(\sin\theta_2+\sin\theta_3+\sin\theta_4)\right\} \quad \ldots \quad (4\cdot23)$$

অতএব $B'N_1$ দূরত্বের বর্গ

$$B'N_1{}^2=\frac{R^2}{4} \quad \text{অর্থাৎ} \quad B'N_1=\frac{R}{2} \text{ এবং কাজেই}$$

$$B'N_1=C'N_1=D'N_1।$$

অতএব $B'C'D'$ ত্রিভুজের N_1 পরিকেন্দ্র। ইহাই BCD ত্রিভুজের নববিন্দু বৃত্তের কেন্দ্র। এই নববিন্দু বৃত্ত BC, CD, DB এর মধ্যবিন্দুগামী ও শীর্ষগুলি হতে বিপরীত বাহুর উপর লম্বপাদবিন্দুগামী এবং শীর্ষবিন্দুগুলি হতে লম্ববিন্দুর দূরত্বের মধ্যবিন্দুগামী।

CDA ত্রিভুজের নববিন্দু N_2 এর স্থানাঙ্ক

$$N_2 : \left\{\frac{R}{2}(\cos\theta_3+\cos\theta_4+\cos\theta_1),\ \frac{R}{2}(\sin\theta_3+\sin\theta_4+\sin\theta_1)\right\} \quad \cdots \quad (4{\cdot}24)$$

সহজেই পাওয়া যায়

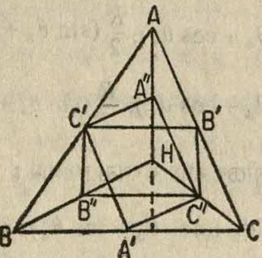
$$N_2M^2=\frac{R^2}{4} \text{ অর্থাৎ } N_2M=\frac{R}{2}\text{। একইরূপে}$$

$$N_1M=N_2M=N_3M=N_4M=\frac{R}{2}\text{ ।}$$

কাজেই বাকী সিদ্ধান্ত যে চারটি ত্রিভুজের চারটি নববিন্দু বৃত্ত M বিন্দুতে ছেদ করে প্রমাণিত হল।

নববিন্দুবৃত্তের প্রমাণ সংক্ষেপে স্থানাঙ্ক জ্যামিতি এবং ত্রিকোণমিতির সাহায্যে দেওয়া হয়েছে। এখন নববিন্দুবৃত্তের ধর্মের জ্যামিতির সাহায্যে প্রমাণ দেওয়া হবে।

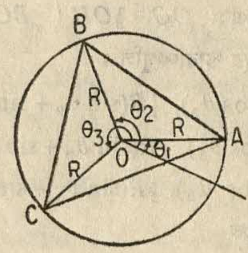
1.4 ABC নির্দিষ্ট ত্রিভুজ এবং H লম্ববিন্দু। 4.5 নং চিত্র দ্রষ্টব্য।



4.5 নং চিত্র

$A', B', C', A'', B'', C''$ যথাক্রমে BC, CA, AB, HA, HB, HC এর মধ্যবিন্দু এবং D, E, F শীর্ষোন্নতিগুলির লম্ব পাদবিন্দু। স্পষ্টতঃই $B'C'$ এবং $B''C''$ উভয়েই BC বাহুর সমান্তরাল এবং $B'C''$, $C'B''$ রেখাগুলি AH এর সমান্তরাল। যেহেতু AH রেখা BC এর উপর লম্ব, $B'C'B''C''$ আয়তক্ষেত্রে পরিণত হল। অনুরূপে $C'A'C''A''$-ও আয়তক্ষেত্র। অতএব $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ একই বৃত্তের তিনটি ব্যাস। যেহেতু বৃত্তের ব্যাসগুলি D, E, F বিন্দুগুলিতে সমকোণ উৎপন্ন করে, একই বৃত্ত এই সকল বিন্দু দিয়ে যায়। কাজেই নববিন্দু-বৃত্তের কেন্দ্রের অবস্থান $A'A''$ বা $B'B''$ বা $C'C''$ এর মধ্যবিন্দুতে এবং এই বিন্দুর স্থানাঙ্কই নববিন্দুর স্থানাঙ্ক।

1.5 ত্রিভুজের ক্ষেত্রেও অয়েলার রেখার অতিরিক্ত ধর্ম নির্ণয় করা যেতে পারে। কাজেই প্রাথমিক ত্রিকোণমিতির প্রয়োগের সাহায্যে এই ধর্মগুলি দেখান যাবে। 4.6 নং চিত্র দ্রষ্টব্য। *ABC* একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজ। *O* ইহার পরিকেন্দ্র এবং *R* পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ।



4.6 নং চিত্র

স্পষ্টতঃ $\theta_3 - \theta_2 = 2\angle A,\ \theta_2 - \theta_1 = 2\angle C,\ 2\pi - (\theta_3 - \theta_1) = 2\angle B$ ... (4·25)

উপরের সিদ্ধান্তগুলি পরিকেন্দ্র *O*, *ABC* ত্রিভুজের বাইরে পড়লেও সত্য। *ABC* ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক

$$G:\ \left\{\frac{1}{3}R\,(\cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \cos\theta_3),\quad \frac{1}{3}R\,(\sin\theta_1 + \sin\theta_2 + \sin\theta_3)\right\}$$

অর্থাৎ $G:\ \left\{\dfrac{R}{3}\sum_{i=1}^{3}\cos\theta_i,\ \dfrac{R}{3}\sum_{i=1}^{3}\sin\theta_i\right\}$। ... (4·26)

AB জ্যা এর সমীকরণ

$$AB:\ x\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2} + y\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2} = R\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2} \qquad \ldots \quad (4·27)$$

C বিন্দুর *AB* এর উপর উন্নতি *CF* এর সমীকরণ :

$$y\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2} - x\sin\frac{\theta_1+\theta_5}{2} = R\sin\left(\theta_3 - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)। \qquad \ldots \quad (4·28)$$

B বিন্দুর *CA* এর উপর উন্নতি *BE* এর সমীকরণ ঃ

$$y\cos\frac{\theta_1+\theta_3}{2} - x\sin\frac{\theta_1+\theta_3}{2} = R\sin\left(\theta_2 - \frac{\theta_1+\theta_3}{2}\right)। \qquad \ldots \quad (4·29)$$

(4·28) এবং (4·29) সমীকরণ দুইটির সমাধান করে

$$x = R\sum_{i=1}^{3} \cos\theta_i,\quad y = R\sum_{i=1}^{3} \sin\theta_i \text{ ।} \qquad \ldots \quad (4{\cdot}30)$$

(4.30) H বিন্দুর স্থানাঙ্ক দিয়েছে।

কাজেই O, G, H সমরেখ এবং $OG = \frac{1}{3}OH$। BC, CA, AB এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে A', B', C' মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্কগুলি :

$$\left.\begin{aligned} A' &: \{\tfrac{1}{2}R(\cos\theta_2 + \cos\theta_3),\ \tfrac{1}{2}R(\sin\theta_2 + \sin\theta_3)\}, \\ B' &: \{\tfrac{1}{2}R(\cos\theta_3 + \cos\theta_1),\ \tfrac{1}{2}R(\sin\theta_3 + \sin\theta_1)\}, \\ C' &: \{\tfrac{1}{2}R(\cos\theta_1 + \cos\theta_2),\ \tfrac{1}{2}R(\sin\theta_1 + \sin\theta_2)\} \end{aligned}\right\} \qquad \ldots \quad (4{\cdot}31)$$

পুনরায় ধরি N' বিন্দুর স্থানাঙ্ক

$$N' : \left\{\tfrac{1}{2} R \sum_{i=1}^{3} \cos\theta_i,\ \tfrac{1}{2} R\sum_{i=1}^{3} \sin\theta_i\right\} \text{ ।} \qquad \ldots \quad (4{\cdot}32)$$

অতএব

$$A'N'^2 = \tfrac{1}{4}R^2(\cos^2\theta_1 + \sin^2\theta_2) = \tfrac{1}{4}R^2 \text{ অর্থাৎ } A'N' = \tfrac{1}{2}R = B'N' = C'N' \text{ ।}$$

কাজেই N' বিন্দু $A'B'C'$ ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র। এখন D বিন্দু যদি A শীর্ষবিন্দু হতে BC এর উপর লম্বপাদবিন্দু হয়, AD রেখার সমীকরণ

$$AD: \quad x\cos\frac{\theta_2+\theta_3}{2} + y\sin\frac{\theta_2+\theta_3}{2} = R\cos\frac{\theta_2-\theta_3}{2} \qquad \ldots \quad (4{\cdot}33)$$

BC বাহুর সমীকরণ

$$BC: \quad x\sin\frac{\theta_3+\theta_2}{2} - y\cos\frac{\theta_2+\theta_3}{2} = R\sin\left(\frac{\theta_2+\theta_3}{2} - \theta_1\right) \qquad \ldots \quad (4{\cdot}34)$$

(4·33) এবং (4.34) সমীকরণদুইটি সমাধান করে পাই D বিন্দুর স্থানাঙ্ক

$$D: \quad x = R\left\{\cos\frac{\theta_2-\theta_3}{2}\cos\frac{\theta_2+\theta_3}{2} + \sin\left(\frac{\theta_2+\theta_3}{2} - \theta_1\right)\sin\frac{\theta_2+\theta_3}{2}\right\}$$

$$= \tfrac{1}{2}R\left\{\sum_{i=1}^{3}\cos\theta_i - \cos(\theta_2+\theta_3-\theta_1)\right\} \text{ ।}$$

অনুরূপ $y = \frac{1}{2}R\left\{\sum_{i=1}^{3}\sin\theta_i - \sin(\theta_2+\theta_3-\theta_1)\right\}$ $\qquad \ldots \quad (4{\cdot}35)$

কাজেই $DN'^2 = \frac{1}{4}R^2$ অর্থাৎ $DN' = \frac{1}{2}R$। সুতরাং $A'B'C'$ এর পরিকেন্দ্র D, E, F লম্বপাদবিন্দুগুলি দিয়েও যাবে। AH এর মধ্যবিন্দু α এর স্থানাঙ্ক

$$\left\{\frac{1}{2}R\sum_{i=1}^{3}\cos\theta_i,\ \ \frac{1}{2}R\sum_{i=1}^{3}\sin\theta_i\right\}। \quad \ldots \quad (4{\cdot}36)$$

অতএব

$N'\alpha^2 = \frac{1}{4}R^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta_1) = \frac{1}{4}R^2$ অর্থাৎ $N'\alpha = \frac{1}{2}R = N'\beta = N'\gamma$।

β, γ যথাক্রমে BH, CH এর মধ্যবিন্দু। সুতরাং একই বৃত্তে $A', B', C', D, E, F, \alpha, \beta, \gamma$ অবস্থিত এবং ইহার ব্যাসার্ধ $\frac{1}{2}R$ এবং কেন্দ্র N' যেখানে

$$N'\left\{\frac{1}{2}R\sum_{i=1}^{3}\cos\theta_i,\ \frac{1}{2}R\sum_{i=1}^{3}\sin\theta_i\right\}।$$

আমরা এই সিদ্ধান্তে উপনীত হলাম যে O, N' এবং H সমরেখ এবং

$$ON' = \frac{1}{2}OH।$$

এখন আর একটি বিন্দু X নীচের লেখা স্থানাঙ্ক দিয়ে নির্দেশ করি:

$$X:\ \ \{-R\cos(\theta_2+\theta_3-\theta_1),\ \ -R\sin(\theta_2+\theta_3-\theta^1)\}। \quad \ldots \quad (4{\cdot}37)$$

HX রেখার মধ্যবিন্দু (4.35) হতে পাই Dকে। কিন্তু X বিন্দু $x^2+y^2=R^2$ বৃত্তের উপর অবস্থিত অর্থাৎ ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র AD কে পুনরায় X বিন্দুতে ছেদ করে এবং $HD = DX$।

এখন আবার ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্রের উপর P যে কোন চতুর্থ বিন্দু। ইহার স্থানাঙ্ক ধরা যেতে পারে $P(R\cos\theta_4,\ R\sin\theta_4)$। PH এর মধ্যবিন্দু T এর স্থানাঙ্ক

$$T:\ \ \left\{\frac{1}{2}R\sum_{i=1}^{4}\cos\theta_i,\ \frac{1}{2}R\sum_{i=1}^{4}\sin\theta_i\right\}। \quad \ldots \quad (4{\cdot}38)$$

A, B, C ও T এই চারটি বিন্দু বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ সৃষ্টি করে। কোন একটি বিন্দু বাকী তিনটি বিন্দুর সৃষ্ট ত্রিভুজের লম্ববিন্দুর সহিত যোগকারী রেখাগুলি সমবিন্দু এবং একে অপরের সমদ্বিখণ্ডক। P, T, H বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক লক্ষ্য করলে সত্যতা বিষয়ে নিঃসন্দেহ হওয়া যাবে।

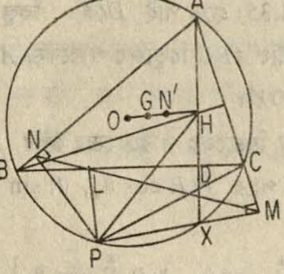
পুনরায় $TN'^2 = \frac{1}{4}R^2(\cos^2\theta_4 + \sin^2\theta_4) = \frac{1}{4}R^2$ অর্থাৎ $TN' = \frac{1}{2}R$। কাজেই T বিন্দু ABC ত্রিভুজের নববিন্দুর উপর অবস্থিত। একই কারণে T বিন্দু PBC, PCA, PAB ত্রিভুজগুলিরও নববিন্দুবৃত্তগুলির উপরও অবস্থিত। অতএব বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের সাহায্যে সৃষ্ট চারটি ত্রিভুজের নববিন্দুবৃত্তগুলি একই বিন্দুতে ছেদ করে।

এখন যদি PL, PM, PN রেখাগুলি P হতে BC, CA, AB বাহুগুলির উপর লম্ব হয় তবে L বিন্দুর স্থানাঙ্ক

$$L: \left\{\frac{R}{2}\left(\sum_{i=1}^{4} \cos\theta_i - \cos(\theta_2+\theta_3-\theta_4)\right),\right.$$

$$\left.\frac{R}{2}\left(\sum_{i=2}^{4} \sin\theta_i - \sin(\theta_2+\theta_3-\theta_4)\right)\right\} । \quad \dots \quad (4{\cdot}39)$$

অতএব LT রেখার উন্নতিমাত্রা $\tan\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_4)$। এই রাশির $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ এর প্রতিসাম্য আছে। কাজেই LT, MT, NT এই তিনটি রেখারই একই উন্নতিমাত্রা অর্থাৎ L, M, N, T সমরেখ। সুতরাং সিম্‌সন্ রেখার ধর্ম প্রমাণিত হল। P বিন্দু অপেক্ষা ABC ত্রিভুজের সিম্‌সন্ রেখা LMN, T বিন্দু দিয়ে গিয়েছে অর্থাৎ P বিন্দুর সহিত ABC ত্রিভুজের লম্ববিন্দু H এর যোগকারী রেখার মধ্যবিন্দু দিয়ে গিয়েছে। এইরূপে চারটি সিম্‌সন্ রেখা T বিন্দুতে সমবিন্দু। 4.7 নং চিত্র বিন্দুগুলির অবস্থান নির্দেশ করেছে।

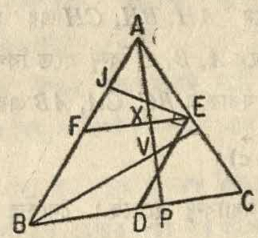


4·7 নং চিত্র

1.6. আমাদের নববিন্দুবৃত্তের অস্তিত্বের প্রমাণ একাধিকরূপে দেওয়া হয়েছে। অল্প বয়সের কিশোরও আরও সহজ প্রমাণ যে দিতে পারে তা দেখাব।

ABC ত্রিভুজের D, E, F বিন্দু যথাক্রমে BC, CA, AB বাহুর মধ্যবিন্দু এবং P বিন্দু A অপেক্ষা BC এর উপর লম্বপাদবিন্দু। V লম্ববিন্দু এবং X বিন্দু AV এর মধ্যবিন্দু। EF, ED যোগ করা হল এবং EX কে বর্ধিত করে AB বাহুকে J বিন্দুতে ছেদ করে। যেহেতু AFE ত্রিভুজ (4.8 নং চিত্র দ্রষ্টব্য) ABC ত্রিভুজের সদৃশ এবং AFE ত্রিভুজের প্রত্যেকটি বাহু ABC ত্রিভুজের বাহুগুলির অর্ধ, অতএব X বিন্দু AFE ত্রিভুজের লম্ববিন্দু এবং $\angle FJE = 90°$। কিন্তু যেহেতু ED রেখা

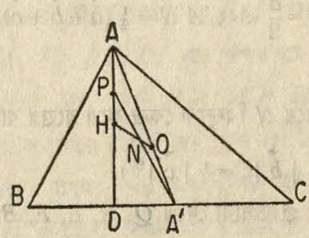
AB এর সমান্তরাল, $\angle JED = 90°$। কাজেই $\angle XED + \angle XPD = 180°$ এবং X, E, D, P বৃত্তস্থ বিন্দুসকল। এখন দেখা যায় যে কত সহজে নববিন্দু বৃত্তের অস্তিত্ব প্রমাণিত হল।



4.8 নং চিত্র

1.7. উপরে বর্ণিত ত্রিভুজের ধর্মগুলি ভেক্টর বীজগণিতের সাহায্যে অতি সহজে পাওয়া সম্ভব।

ABC নির্দিষ্ট ত্রিভুজ এবং O ইহার পরিকেন্দ্র (4.9 নং চিত্র দ্রষ্টব্য)।



4.9 নং চিত্র

O বিন্দুকে মূলবিন্দু ধরে A বিন্দুর অবস্থানকে $\vec{a}$ ভেক্টর দ্বারা নির্দেশিত করা হল, B বিন্দুকে $\vec{b}$ দ্বারা ইত্যাদি। অপর বিন্দুগুলির প্রয়োজন যখন উপস্থিত হবে তখন সেরূপ ভেক্টর দ্বারা নির্দেশ করব। যেহেতু O বিন্দু ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র,

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| \qquad \ldots \qquad (4{\cdot}40)$$

ধরা যাক $\vec{h} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$। অতএব

$$\overrightarrow{AH} = \vec{b} + \vec{c} \text{ এবং } \overrightarrow{CB} = \vec{b} - \vec{c}। \text{ সুতরাং}$$

$$(\vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = |\vec{b}|^2 - |\vec{c}|^2 = 0। \qquad \ldots \qquad (4{\cdot}41)$$

(4.41) হতে $\overrightarrow{AH}$ ভেক্টর $\overrightarrow{BC}$ ভেক্টরের উপর লম্ব। প্রতিসাম্য দেখে পাই—BH রেখা AC এর উপর লম্ব এবং CH রেখা AB এর লম্ব। কাজেই ABC ত্রিভুজের শীর্ষগুলির উন্নতিগুলি একই বিন্দু H-এ মিলিত হয় এবং ইহাই লম্ব বিন্দু।

P, Q, R কে যথাক্রমে AH, BH, CH এর মধ্যবিন্দু নেওয়া হল এবং D, E, F বিন্দুসকল যথাক্রমে A, B, C বিন্দু হতে বিপরীত বাহুগুলির উপর লম্ব-পাদবিন্দু। A', B', C' যথাক্রমে BC, CA, AB এর মধ্যবিন্দু। ধরা যাক

$$\vec{n} = \tfrac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})\text{।} \qquad \ldots \quad (4.42)$$

N বিন্দু OH রেখার মধ্যবিন্দু হয়েছে। যেহেতু N, $A'P$ রেখার মধ্যবিন্দু এবং $\angle ADP$ সমকোণ, ND রেখা $A'DP$ ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ অর্থাৎ

$$NA' = ND\text{।}$$

পুনরায় $$\vec{p} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OH}}{2} = \tfrac{1}{2}(2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})\text{।} \qquad \ldots \quad (4.43)$$

কাজেই $$\overrightarrow{NP} = \vec{p} - \vec{n} = \frac{\vec{a}}{2} \text{ এবং } A'N = \tfrac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) - \tfrac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) = \tfrac{1}{2}\vec{a}\text{।}$$

(4.44)

অতএব $A'N$ ব্যাসার্ধ নিয়ে N বিন্দুকে কেন্দ্র করে বৃত্তের ব্যাসার্ধ

$$\tfrac{1}{2}|\vec{a}|^2 = \tfrac{1}{2}|\vec{b}|^2 = \tfrac{1}{2}|\vec{c}|^2\text{।}$$

এই বৃত্ত P, D, A' এবং প্রতিসাম্য দেখে Q, R, E, F, B', C' বিন্দুগামী। ইহাই নববিন্দুবৃত্ত। উপরন্তু ABC ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র G ভেক্টর দিয়ে নির্দেশিত হলে

$$G: \ \tfrac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})\text{।}$$

কাজেই O, G, N, H সমরেখ এবং ইহাই অয়েলার রেখা। $OG : GN : NH = 2 : 1 : 3$। উপরের ত্রিভুজের ধর্মগুলির সঙ্গে আরও উপপাদ্য জড়িত আছে। তাদের আলোচনা ধীরে ধীরে নীচে করব। সিম্‌সন্ রেখা, নববিন্দুবৃত্ত এবং অন্যান্য সম্পর্কীয় বৃত্ত বিষয়ে বিশদ আলোচনার জন্য লেস্টার [2], কোক্সিটার [3], সিম্‌সন্ [4], ওয়েস্ট্ [5], ওয়ালিস্ [6] গুলশেখরন্ [7] এর প্রবন্ধের বা পুস্তকের উল্লেখ করা হল।

1.8 D বিন্দু ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তের উপর অবস্থিত যে কোন বিন্দু। D অপেক্ষা ABC ত্রিভুজের সিম্‌সন্ রেখা বা S রেখা সম্বন্ধে নীচের দুইটি উপপাদ্য বিদ্যালয়ের জ্যামিতি পুস্তকে পাওয়া যাবে ঃ

1 নং উপপাদ্য : যদি DX রেখা BC বাহুর উপর লম্ব হয়ে পুনরায় ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তকে X বিন্দুতে ছেদ করে, তবে D বিন্দু অপেক্ষা S-রেখা AX রেখার সমান্তরাল।

2 নং উপপাদ্য : যদি H বিন্দু ABC ত্রিভুজের লম্ববিন্দু হয়, তবে D অপেক্ষা S-রেখা HD রেখাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

এই দুইটি উপপাদ্যের প্রমাণ উপরে আলোচনার মধ্যে একরূপে বা অন্যরূপে দেওয়া হয়েছে। আমরা আরও কিছু সংশ্লিষ্ট উপপাদ্য যোগ করব।

3 নং উপপাদ্য : যদি ABC, DEF দুইটি বৃত্তস্থ ত্রিভুজ এরূপ হয় যে D বিন্দুর অপেক্ষা ABC ত্রিভুজের S-রেখা EF রেখার উপর লম্ব হলে, D, E, F এর অপেক্ষা ABC ত্রিভুজের S-রেখাগুলি এবং A, B, C বিন্দুগুলির অপেক্ষা DEF ত্রিভুজের S-রেখাগুলি W বিন্দুতে ছেদ করে এবং W বিন্দু HH' এর মধ্যবিন্দু। H বিন্দু ABC ত্রিভুজের লম্ববিন্দু এবং H' বিন্দু DEF ত্রিভুজের লম্ববিন্দু।

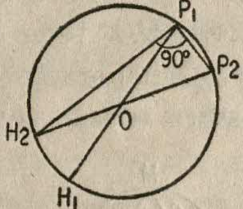
প্রমাণ : উপরের প্রথম উপপাদ্য অনুসারে ABC ত্রিভুজের E, F বিন্দুগুলি অপেক্ষা সিম্‌সন্ রেখা সকল এবং DEF ত্রিভুজের E, F বিন্দুগুলি অপেক্ষা সিম্‌সন্ রেখাগুলি যথাক্রমে BC, CA, AB, FD, DE এর উপর লম্ব। ধরা যাক D', E', F', A', B', C' যথাক্রমে $HD, HE, HF, H'A, H'B, H'C$ এর মধ্যবিন্দু।

উপরের দ্বিতীয় উপপাদ্য অনুসারে ABC ত্রিভুজের D বিন্দু অপেক্ষা সিম্‌সন্ রেখা D' বিন্দুগামী এবং EF বাহুর উপর লম্ব (শর্ত অনুসারে)। কাজেই এই সিম্‌সন্ রেখা DH' অর্থাৎ $D'W$ রেখার সমান্তরাল। অনুরূপ $A, B, C, D, E, F,$ সকল বিন্দু বিষয়েই খাটে। অতএব প্রস্তাবিত উপপাদ্য প্রমাণিত হল।

4 নং উপপাদ্য : (EF রেখার লম্বমেরুবিন্দু) ABC একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজ এবং ইহার পরিবৃত্ত অঙ্কিত হয়েছে। EF ভেদক পরিবৃত্তকে E, F বিন্দুতে ছেদ করে। A, B, C এর EF রেখার উপর প্রক্ষেপ যথাক্রমে L, M, N বিন্দু। তবে L, M, N এর যথাক্রমে BC, CA, AB এর উপর লম্বগুলি সমবিন্দু। এই বিন্দুকে EF রেখার লম্বমেরুবিন্দু অভিহিত করা হয়। এই বিন্দু আবার ABC ত্রিভুজের E, F অপেক্ষা সিম্‌সন্ রেখাগুলির ছেদবিন্দু।

প্রমাণ : ধরা যাক AL রেখা বৃত্তকে D বিন্দুতে ছেদ করে। অতএব উপরের প্রথম উপপাদ্য অনুসারে ABC ত্রিভুজের D বিন্দু অপেক্ষা সিম্‌সন্ রেখা AX এর সমান্তরাল অর্থাৎ BC বাহুর উপর লম্ব। কাজেই উপরের 3 নং উপপাদ্য অনুসারে

O হয়, তবে ইহাদের একটি ভরকেন্দ্র G, সামান্যীকৃত লম্ববিন্দু ও সামান্যীকৃত নববিন্দু N আছে। স্পষ্টতঃই যখন $n=1$, G হবে P_1 বিন্দু। 4.12 নং চিত্র দ্রষ্টব্য।



4.12 নং চিত্র

ধরা যাক H_i বিন্দু P_i বিন্দুর কেন্দ্রে প্রতিফলন। H_1 কে P_1 বিন্দুর লম্ববিন্দু ধরলে O, G, H_1 সমরেখ। H_1 তখন সামান্যীকৃত লম্ববিন্দু। $OG : GH_1 = -1 : 2$।

যখন $n=2$, P_1H_2 রেখা P_1P_2 রেখার উপর লম্ব। P_1H_2, P_2H_1 সমান্তরাল এবং উভয়েই P_1P_2 এর উপর লম্ব। P_1H_2, P_2H_1 এর মিলন বিন্দু H দিয়ে অভিহিত করলে H, P_1H_2, P_2H_1 উভয়কেই $-1 : 1$ অনুপাতে বিভক্ত করে। O, G, H সমরেখ এবং $OG : GH = 0 : 2$।

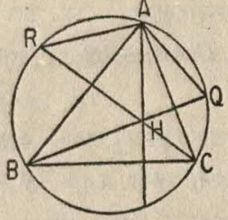
যখন $n=3$, G_1 যদি P_2P_3 এর ভরকেন্দ্র হয়, P_1G_1, P_2G_2, P_3G_3 সমবিন্দু। ইহাদের সাধারণ ভরকেন্দ্র G, প্রত্যেকেই $2 : 1$ অনুপাতে বিভক্ত করে। পুনরায় যদি H_1, P_2P_3 এর লম্ববিন্দু হয়, P_1H_1, P_2H_2, P_3H_3 সমবিন্দু। O, G, H সমরেখ। অনুরূপে বৃত্তস্থ বহুভুজের ক্ষেত্রে অয়েলার রেখার সামান্যীকরণ সম্ভব।

উপরের বিষয়গুলির বিস্তারিত আলোচনার জন্য কলিংস্ [8]-এর নাম উল্লেখ করা হল।

2. পূর্বে অপেক্ষাকৃত পরিচিত সমবিন্দু রেখাগুলি বা সমরেখ বিন্দুগুলির আলোচনা করা হয়েছে। কিন্তু এছাড়াও আরও নানা রকমের রেখা বা বিন্দু পাওয়া সম্ভব। প্রথমেই ত্রিভুজের বাহুতে প্রতিফলন বিন্দুগুলির ধর্ম পরীক্ষা করে দেখব। একটি ধর্ম পূর্বেই আলোচিত হয়েছে।

ABC ত্রিভুজের শীর্ষগুলি B, C এর উন্নতি BH, CH, ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তকে Q, R বিন্দুতে ছেদ করে। পূর্বের উপপাদ্য অনুসারে CA বাহু HQ এর

সমদ্বিখণ্ডক এবং AB বাহু HR রেখার সমদ্বিখণ্ডক। 4.13 নং চিত্র দ্রষ্টব্য। অনুরূপ HA এর BC বাহুতে প্রতিফলন পাই।



4.13 নং চিত্র

কাজেই AH এর AB, BC, CA এর উপর প্রতিফলনগুলি A বিন্দুতে সমবিন্দু এবং A পরিবৃত্তে অবস্থিত। যদি H বিন্দুগামী চলরেখা l নেওয়া হয়, তবে যখন l, HA এর উপর আসে তখন l এর AB, BC, CA এর উপর প্রতিফলনগুলি পরিবৃত্তস্থ A বিন্দুতে মিলিত হয়। l রেখাকে যদি θ কোণ ঘূর্ণন করা যায়, তাহার CA বাহুর উপর প্রতিফলন Q বিন্দুর চারপাশে উল্টাদিকে θ কোণ ঘুরিবে। কাজেই নতুন প্রতিফলনগুলিও পরিবৃত্তের বিন্দুতে মিলিত হবে। অনুরূপ যুক্তি AB, BC বাহুর উপর প্রতিফলনের ক্ষেত্রেও খাটে। অতএব AB, BC, CA বাহুর উপর l এর প্রতিফলন পরিবৃত্তস্থ কোন বিন্দু K তে মিলিত হয়। H বিন্দুগামী যে কোন রেখার AB, BC, CA এর উপর প্রতিফলনগুলি পরিবৃত্তস্থ কোন K বিন্দুতে সমবিন্দু।

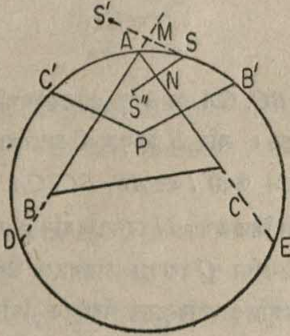
ধরা যাক চারটি রেখা a, b, c, d একটি চতুর্ভুজ সৃষ্টি করেছে। এদের যে কোন তিনটি রেখা মিলে ত্রিভুজ সৃষ্টি করে। ধরা যাক bcd ত্রিভুজের লম্ববিন্দু H_a, acd ত্রিভুজের লম্ববিন্দু H_b ইত্যাদি। এরূপ চারটি ত্রিভুজের লম্ববিন্দু H_a, H_b, H_c, ও H_d। মনে করি l রেখা H_a H_b। l রেখার bcd ত্রিভুজের বাহুগুলিতে প্রতিফলনগুলি সমবিন্দু যেহেতু l রেখা H_a বিন্দুগামী। একইরূপে l রেখার acd ত্রিভুজের বাহুগুলিতে প্রতিফলন সমবিন্দু যেহেতু l রেখা H_b বিন্দুগামী। অতএব H_aH_b রেখার a, b, c, d চারটি রেখাতেই প্রতিফলিত রেখাগুলি সমবিন্দু। কাজেই l রেখা H_c, H_d বিন্দু দুইটি দিয়েও যাবে অর্থাৎ চারটি ত্রিভুজের লম্ববিন্দু সমরেখ।

2.1. এবার আরও কিছু প্রতিফলন বিন্দুর ধর্ম আলোচনা করব।

(T) যে কোন বিন্দু P এর ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহুর উপর প্রতিফলন বিন্দু যথাক্রমে A', B', C'। প্রমাণিত হবে যে $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$, $A'B'C'$ বৃত্তগুলি সমবিন্দু।

(T') $A'BC$, $B'CA$, $C'AB$, ABC ত্রিভুজগুলির পরিবৃত্তগুলি R বিন্দুতে সমবিন্দু প্রমাণিত হবে।

প্রথমে (T) উপপাদ্যের প্রমাণ দেওয়া হবে। 4.14 নং চিত্র দ্রষ্টব্য। $AB'C'$ বৃত্তের উপর S যে কোন বিন্দু নেওয়া হল। S', S'' বিন্দু S বিন্দুর যথাক্রমে



4.14 নং চিত্র

AB, AC এর উপর প্রতিফলন বিন্দু। $AB'C'$ বৃত্ত AB, AC বাহু দুইটিকে D, E বিন্দুতে ছেদ করে। SS', SS'' যথাক্রমে AB, AC কে M, N বিন্দুতে ছেদ করে। AB রেখার উভয় পার্শ্বের প্রতিসাম্য লক্ষ্য রেখে নিম্নলিখিত কোণের সমতা পাই:

$$\angle PS'S = \angle C'SS' = \angle DSS' - \angle DSC' = DSS' - \angle DAC'$$
$$= (90° - \angle ADS) - \angle DAP \quad \ldots \quad (4.46)$$

অনুরূপ AC এর উভয় পার্শ্বের প্রতিসাম্য লক্ষ্য রেখে

$$\angle PS''S = \angle B'SS'' = \angle B'SE + \angle ESS'' = \angle B'AE + \angle ESS''$$
$$= PAE + (90° - \angle AES) \quad \ldots \quad (4.47)$$

(4.46) কে (4.47) হতে বিয়োগ করে

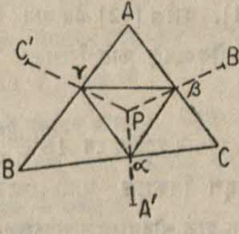
$$\angle PS'S - \angle PS'S = \angle PAE + \angle DAP = \angle DAE$$
$$= 180° - \angle MAN = \angle MSN = \angle S'SS'' \quad (4.48)$$

যেহেতু A, S, M, N বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

অতএব P বিন্দু $S'S'$ রেখার উপর অবস্থিত। ধরা যাক $PS''S'$ রেখা $AB'C'$ বৃত্তকে Q বিন্দুতে ছেদ করে। অনুরূপ $BA'C'$ বৃত্ত $AB'C'$ বৃত্তকে Q বিন্দুতে ছেদ করে যেহেতু Q বিন্দুর AB, AC এর উপর প্রতিফলন বিন্দুগুলি PQ রেখার উপর অবস্থিত। ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ক্ষেত্রেও বলা চলে যে $PS''S'$ রেখা ABC ত্রিভুজকে Q বিন্দুতে ছেদ করে।

(T') উপপাদ্যের প্রমাণ : $A'BC$, $B'CA$, $C'AB$, $A'B'C'$ বৃত্তসকল R বিন্দুতে সমবিন্দু যেহেতু এই ত্রিভুজগুলি ABC ত্রিভুজের বাহুগুলিতে P বিন্দুকে প্রতিফলিত করে পাওয়া গিয়েছে এবং $A'BC$, $B'CA$, $C'AB$, $A'B'C'$ নিজেদের মধ্যে এরূপ সম্বন্ধে আবদ্ধ যেরূপ $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$, ABC নিজেদের মধ্যে সম্বন্ধে আবদ্ধ।

উপরের প্রমাণের ধারা কিছুটা আবছা ও বস্তু নিরপেক্ষ মনে হতে পারে। নীচে বিকল্প প্রমাণ দেওয়া হল। 4.15 নং চিত্র দ্রষ্টব্য।



4.15 নং চিত্র

যদি A', B', C' বিন্দুগুলি P বিন্দুর BC, CA, AB এর উপর প্রতিফলন-বিন্দু হয় এবং ABC নির্দিষ্ট ত্রিভুজ, তবে প্রমাণ করতে হবে যে :

(T) $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$, ABC বৃত্তগুলি সমবিন্দু, ধরা যাক D বিন্দুতে,

(T') $A'BC$, $B'CA$, $C'AB$, $A'B'C'$ বৃত্তগুলি সমবিন্দু, ধরা যাক D বিন্দুতে।

4.15 নং চিত্রে $\angle B'AC' = 2A$, $\angle AB'C' = \frac{\pi}{2} - \angle AC'B'$ (4.49)

ধরা যাক $AB'C'$, $A'BC'$ বৃত্তগুলি C' বিন্দু ব্যতীত D বিন্দুতে ছেদ করে।

অতএব

$$\left.\begin{aligned} &\angle ADC' = \angle AB'C' = \frac{\pi}{2} - \angle A. \\ \text{অনুরূপে}\quad &\angle BDC' = \pi - BA'C' = \frac{\pi}{2} + \angle B \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad (4.50)$$

সুতরাং

$$\angle BDA = \angle BDC' - \angle ADC' = \angle A + \angle B = \pi - \angle C \qquad \ldots \qquad (4.51)$$

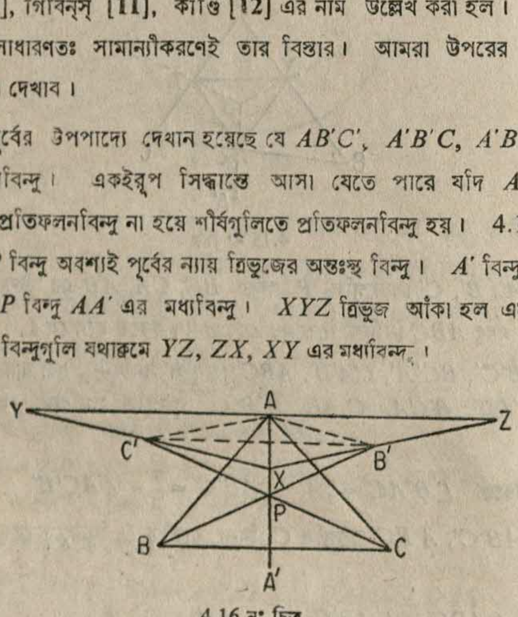
অতএব ABC বৃত্ত D বিন্দুগামী। অনুরূপে আমরা দেখাতে পারি যে অবশিষ্ট বৃত্ত $CA'B'$ ও D বিন্দুগামী অর্থাৎ (T)-উপপাদ্য প্রমাণিত হল।

এখন (T')-উপপাদ্যের সরাসরি প্রমাণ দেব। ABC ত্রিভুজের P অপেক্ষা $\alpha\beta\gamma$ পাদত্রিভুজ। ধরা যাক $AB'C'$, $A'BC'$ বৃত্ত দুইটি C' বিন্দুব্যতীত $Q(=D')$ বিন্দুতে ছেদ করে। বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের ধর্ম প্রয়োগ করে

$$\begin{aligned}\angle A'QB &= \angle A'QC' - \angle BQC' = A'B'C' - \angle BAC' \\ &= \alpha\beta\gamma - \angle\gamma AP = \angle\alpha\beta P + \angle\gamma\beta P - \angle\gamma\beta P \\ &= \angle\alpha CP - \angle A'CB \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (4.52)\end{aligned}$$

অতএব Q বিন্দু $A'BC$ বৃত্তে অবস্থিত। অনুরূপে Q বিন্দু $B'CA$ বৃত্তে অবস্থিত। এরূপ উপপাদ্যগুলির বিশদ আলোচনার জন্য লংগেট্ হিগিন্স্ [8], কলিংস্ [9], ফোর্ডার [10], গিবিন্স্ [11], কাণ্ডি [12] এর নাম উল্লেখ করা হল। বিজ্ঞানের সবদিকেই সাধারণতঃ সামান্যীকরণেই তার বিস্তার। আমরা উপরের উপপাদ্যের সামান্যীকরণ দেখাব।

2.2 পূর্বের উপপাদ্যে দেখান হয়েছে যে $AB'C'$, $A'B'C$, $A'BC'$, ABC বৃত্তগুলি সমবিন্দু। একইরূপ সিদ্ধান্তে আসা যেতে পারে যদি A', B', C' বাহুগুলিতে প্রতিফলনবিন্দু না হয়ে শীর্ষগুলিতে প্রতিফলনবিন্দু হয়। 4.16 নং চিত্র দ্রষ্টব্য। P বিন্দু অবশ্যই পূর্বের ন্যায় ত্রিভুজের অন্তঃস্থ বিন্দু। A' বিন্দু এমনভাবে অবস্থিত যে P বিন্দু AA' এর মধ্যবিন্দু। XYZ ত্রিভুজ আঁকা হল এমনভাবে যে A, B', C' বিন্দুগুলি যথাক্রমে YZ, ZX, XY এর মধ্যবিন্দু।



4.16 নং চিত্র

অতএব BC বাহু $B'C'$ এর সমান্তরাল। অর্থাৎ YZ এর সমান্তরাল। সুতরাং $BC = B'C' = \frac{1}{2}\, YZ$। কাজেই যদি YB, ZC রেখাদ্বয় T বিন্দুতে

মিলিত হয়, A, B, C যথাক্রমে TYZ ত্রিভুজের YZ, ZX, XY এর মধ্যবিন্দু। যেহেতু P বিন্দু BB', CC' উভয়েরই মধ্যবিন্দু, P বিন্দু $YZXT$ চতুর্ভুজের ভরকেন্দ্র। সুতরাং A' বিন্দু XT এর মধ্যবিন্দু। অতএব XYZ, XYT, XZT, YZT ত্রিভুজগুলির নববিন্দুবৃত্তগুলি অর্থাৎ $AB'C', A'BC', A'BC', A'B'C'$ ত্রিভুজগুলির পরিবৃত্তগুলি সমবিন্দু (1.3 অনুচ্ছেদ দ্রষ্টব্য)। যুক্তি বিপরীতে করে নিয়ে $A'BC$, $AB'C$, ABC', ABC ত্রিভুজগুলির পরিবৃত্তগুলি সমবিন্দু।

2.2 উপরের 2.1 নং ও 2.2 নং অনুচ্ছেদের উপপাদ্যগুলি সরল 'জটিল রাশির' বীজগণিতের সাহায্যে প্রমাণ করতে পারি। আমরা বিশ্লেষণ যথাসম্ভব সরলভাবে দেখাব যদিও জটিল রাশি পূর্বেই কিছু ব্যবহার করা হয়েছে, আমাদের এখানে একে একটু বিস্তৃতভাবে ব্যবহার করতে হবে। আমরা জটিল রাশিকে বাস্তব রাশিরই বিস্তার হিসাবে পরিচিতি দিয়ে শুরু করব। সংক্ষেপে এখানে জটিল রাশির প্রক্রিয়াগুলির বিবরণ দিয়ে জটিলরাশির বীজগণিতের পরিচিতি দেব। ত্রিঘাত ও ইহা অপেক্ষা উচ্চতরঘাতের সমীকরণের সমাধান হতে পরীক্ষামূলকভাবে 'i' চিহ্নের সূত্রপাত হয়। i চিহ্নের ধর্ম $i^2 = -1$ দিয়ে বিবৃত হয়েছে। প্রকৃতপক্ষে i চিহ্নটি জটিলরাশিতেই অর্থবহ হয়েছে। বস্তুতঃ $i = \sqrt{-1}$ এর পদার্থবিদ্যার প্রশ্নে প্রয়োগ প্রায়শঃই খুবই প্রচ্ছন্ন এবং সরাসরি নয় যদিও প্রত্যাবর্তী তড়িৎএ প্রয়োগ অনেকটা সরাসরি, সরল ও ফলদায়ী।

সম্পূর্ণ যুক্তিগ্রাহ্যভাবে অগ্রসর না হয়ে ঐতিহাসিক ক্রমানুসারে লিখলে দেখা যাবে যে $x^2 + 1 = 0$ সমীকরণের বাস্তব x-এ কোন সমাধান সম্ভব নয়। যদি এই সমীকরণের সমাধান পাওয়া সম্ভব মনে করতে হয় তবে আমাদের জটিল রাশির অস্তিত্ব চিন্তা করতে হবে ও বাস্তব রাশি, জটিল রাশিরই বিশেষ রূপ হবে। জটিল রাশির প্রক্রিয়াগুলি যোগকরণ ও গুণকরণে নিম্নরূপে সূত্রসাহায্যে বর্ণিত হল যদি a, b বাস্তব রাশি হয়

(*i*) $i^2 + 1 = 0$,

(*ii*) $a + ib = 0$ হবে যদি মাত্র $a = 0, b = 0$ হয়,

(*iii*) $(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$

(*iv*) $(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(bc + ad)$.

যদি লেখা যায় $z = a + ib$, a কে বলা হবে বাস্তব অংশ $Rl(z)$ এবং b কে লেখা

হবে অবাস্তব অংশ $Im(z)$। যদি $z = a + ib$ হয়, $a - ib$ কে z এর অনুবন্ধী বা $\bar{z}$ লেখা হবে। অতএব $z\bar{z} = a^2 + b^2$, $z + \bar{z} = 2Rlz$, $z - \bar{z} = 2iImz$।

জটিল রাশির বিপরীত অঙ্ক নিম্নরূপ

$$\frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{ib}{a^2+b^2}।$$

যদি θ, φ বাস্তব কোণদ্বয় x-অক্ষের সঙ্গে দুইটি মেরুবিন্দুগামী রেখা দিয়ে সৃষ্ট হয়ে থাকে, তবে

$$(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\varphi + i\sin\varphi) = (\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi)$$
$$+ i(\sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi) = \cos(\theta + \varphi) + i\sin(\theta + \varphi)$$

উপরের সূত্র বিস্তৃত করে $\theta, \varphi, \psi, \cdots\cdots$ ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার কোণগুলি নিয়ে লেখা যেতে পারে। যদি $\theta = \varphi = \psi = \cdots\cdots$ হয়,

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

যখন n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যাজ্ঞাপক।

যদি $n = -p$ হয়,

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{-p} = \frac{1}{(\cos\theta + i\sin\theta)^p} = \frac{1}{\cos(p\theta) + i\sin(p\theta)}$$
$$= \cos(p\theta) - i\sin(p\theta)$$

যদি কোন মেরুবিন্দুগামী রেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সঙ্গে θ কোণ উৎপন্ন করে থাকে,

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta), \quad r = \sqrt{z\bar{z}}$$

x-অক্ষের ডানদিককে ধনাত্মক বাস্তব অক্ষ বলা হয় ও বামদিককে ঋণাত্মক বাস্তব অক্ষ বলা হয়। y-অক্ষের উপরের অংশকে অবাস্তব ধনাত্মক অক্ষ ও নীচের অংশকে অবাস্তব ঋণাত্মক অক্ষ বলা হয়।

$r = |z| =$ modulus $|z|$ বা z-এর মাপাঙ্ক এবং θ-কে $arg(z)$ বা z-এর কৌণিক মাপাঙ্ক লেখা হয়।

$\cos\theta + i\sin\theta$-কে $e^{i\theta}$ পরিভাষা দিয়ে বিবৃত হয়। অতএব $e^{i\pi/2} = i$ এবং $e^{i\pi} = -1$, $e^{3i\pi/2} = -i$। এরূপ বর্ণনা নীচের শ্রেণীবিস্তারের জন্য সম্ভব:

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{i^2\theta^2}{2!} + \frac{i^3\theta^3}{3!} + \frac{i^4\theta^4}{4!} + \frac{i^5\theta^5}{5!} + \cdots$$

$$=\left(1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}-\cdots\right)+i\left(\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-\cdots\right)$$

এবং $\cos\theta=1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}-\cdots$ ও $\sin\theta=\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-\cdots$।

উপরের সম্বন্ধগুলি পরিষ্কারভাবে দেখা যায় যদি

$$z=e^{i\theta},\ \log z=i\theta=i\arg z,\ |z|=\sqrt{e^{i\theta}\cdot e^{-i\theta}}=1 \text{ এবং}$$

$$\log\left(\frac{z}{\bar z}\right)=2i\theta;\ |\cos\theta+i\sin\theta|=\sqrt{(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta-i\sin\theta)}$$

$$=\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=1,$$

$$\log i=\log\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=\log e^{i\pi/2}=i\arg(i),$$

$$\log(-i)=\log(e^{3i\pi/2})=i\frac{3\pi}{2}=i\arg(-i)।$$

জটিল রাশি সহগসহ সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণের z-অপেক্ষা সমাধান বাস্তব রাশিগণিতের ন্যায়ই করা হয়ে থাকে। উদাহরণ রূপে নেওয়া যেতে পারে

$$z^2+(2-i)z+3=0।$$

z-অপেক্ষা সমাধান হবে $$z=\frac{(i-2)\pm\sqrt{(2-i)^2-12}}{2}$$

$$=\left(\frac{i}{2}-1\right)\pm\sqrt{-\frac{9}{4}-i}।$$

বর্গমূলের মান নির্ণয় করণীচিহ্নযুক্ত রাশির মান নির্ণয়েরই ন্যায় করতে হবে।

উপরের আলোচনা হতে পরিষ্কার বুঝা যায় যে বাস্তব অক্ষের সমীকরণ $z-\bar z=0$ বা $z=\bar z$ এবং অবাস্তব অক্ষের সমীকরণ $z+\bar z=0$ যেহেতু বাস্তব স্থানাঙ্কের মান $x=\frac{z+\bar z}{2}$ এবং অবাস্তব স্থানাঙ্কের মান $y=\frac{z-\bar z}{2i}$।

যে কোন সরলরেখার সমীকরণ বাস্তব স্থানাঙ্কে $ax+by+c=0$ যেখানে a, b, c সহগগুলি বাস্তব। এই সমীকরণ জটিলরাশির সাহায্যে লিখলে দাঁড়ায় $(a-ib)z+(a+ib)\bar z+2c=0$ অর্থাৎ $z+e^{2i\lambda}\bar z=pe^{i\lambda}$ যদি $a-ib=\rho_1 e^{-i\lambda}$ এবং $\frac{2c}{\rho_1}e^{i\lambda}=-2pe^{i\lambda}$ লেখা হয়। অতএব যেকোন সরলরেখাকে সুবিধামত লেখা যেতে পারে

$$z\bar t+\bar z t=2p,\ p \text{ বাস্তব ও } t\bar t=1।$$

যেহেতু $\bar{t}=\frac{1}{t}$, $z+\bar{z}t^2=2\rho t$ ।

উপরের প্রথম সমীকরণ হতে দেখতে পাই যে বামদিকের দুইটি অনুবন্ধী জটিল রাশির যোগফল বাস্তব। অতএব $z\bar{t}$ ও $\bar{z}t$ এর বাস্তব অংশ ρ। কাজেই $z\bar{t}=\rho+i\mu$ বা $z=t(\rho+i\mu)$, $t\bar{t}=1$, μ বাস্তব।

পুনরায় যদি কোন বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্কদ্বয় $\left(\frac{a+\bar{a}}{2}, \frac{a-\bar{a}}{2i}\right)$ যার ব্যাসার্ধ ρ,

$(z-a)(\bar{z}-\bar{a})=\rho^2$ বা $z-a=\rho e^{i\nu}$, $\bar{z}-\bar{a}=\rho e^{-i\nu}$, ν বাস্তব।
এরপর হতে জটিল রাশির বীজগণিতে ব্যবহারের ধাপগুলি কি করে বাস্তব রাশি হতে পাওয়া গিয়েছে তা বুঝতে অসুবিধা হবে না।

ধরা যাক $z=x+iy$, $\bar{z}=x-iy$ এবং অতএব $z\bar{z}=x^2+y^2$।
... (4·53)

$\bar{z}$ জটিল রাশি z-এর অনুবন্ধী। আমাদের সরলরেখার উপর কোন বিন্দুকে নির্দেশ করতে হলে

$$z=\rho t \text{ বা } z=t(\rho+\lambda i),\ \bar{z}=\frac{1}{t}(\rho-\lambda i),\ \rho, \lambda \text{ বাস্তব} \quad \ldots (4{\cdot}54)$$

লিখতে হবে। অতএব

$$z+t^2\bar{z}=2\rho t \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots (4{\cdot}55)$$

সরলরেখার সমীকরণ যেখানে $\bar{t}=\frac{1}{t}$ বা $t\bar{t}=1$। অনুরূপ, বৃত্তের সমীকরণ

$$z-a=\rho t,\quad \bar{z}-\bar{a}=\rho/t,\quad \sigma=a\bar{a}-\rho^2 \quad \ldots (4{\cdot}56)$$

t_1, t_2 বিন্দুদ্বয় যোগকারী সরলরেখার সমীকরণ

$$z+t_1t_2\bar{z}=t_1+t_2 \quad \ldots \quad \ldots (4{\cdot}57)$$

যেহেতু $t_1\bar{t_1}=1$, $t_2\bar{t_2}=1$, t_1, t_2 উভয় বিন্দুই (4·57) সমীকরণের, সমাধান। অথবা সহজভাবে

t_1 এবং t_2 যুক্তকারী সরলরেখার সমীকরণ
$z=(1-\lambda)\,t_1+\lambda t_2$ (λ বাস্তব)

অতএব $\bar{z}=(1-\lambda)\bar{t}_1+\lambda_2\bar{t}_2$ । কাজেই যদি $|t_1|=|t_2|=1$ হয়, তবে

$$z+\bar{z}t_1t_2=(1-\lambda)t_1+\lambda t_2+(1-\lambda)t_2+\lambda t_1$$
$$=t_1+t_2$$

ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি ইহার পরিকেন্দ্র O অপেক্ষা নির্দিষ্ট করতে পারা যায়। এবং এই পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ একক ধরতে পারি। ধরা যাক A, B, C শীর্ষগুলি a, b, c জটিল রাশিগুলি দিয়ে নির্দেশ করলাম। কাজেই ইহাদের ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক

$$g=\tfrac{1}{3}(a+b+c) \qquad \ldots \qquad \ldots \quad (4{\cdot}58)$$

ABC ত্রিভুজের লম্ববিন্দুর স্থানাঙ্ক

$$h=(a+b+c) \qquad \ldots \qquad \ldots \quad (4{\cdot}59)$$

কারণ, যদি ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ একক ধরে নেওয়া যায় এবং h দিয়ে লম্ববিন্দুর স্থানাঙ্ক জটিলরাশির সাহায্যে লেখা হয়, তবে

$$\frac{h-b}{\bar{h}-\bar{b}}=-\frac{c-a}{\bar{c}-\bar{a}} \text{ এবং } \frac{h-c}{\bar{h}-\bar{c}}=-\frac{a-b}{\bar{a}-\bar{b}}, \text{ যেহেতু}$$

$\arg\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)=2\arg z$ । অতএব এই দুইটি সমীকরণের সমাধান করে পাই

$$h=a+b+c\text{ ।}$$

এখানে অবশ্যই মনে রাখতে হবে যে $\bar{a}=\frac{1}{a},\ \bar{b}=\frac{1}{b},\ \bar{c}=\frac{1}{c}$ ।

অতএব $OH=3OG$ যেখানে O, ABC এর পরিকেন্দ্র। OGH অয়েলার রেখা। AH রেখা BC বাহুর উপর লম্ব। উপরন্তু (4·59) হতে

$$\bar{h}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\sum\frac{bc}{abc} \qquad \ldots \quad (4.60)$$

যেহেতু $\bar{h}=(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})=\sum\frac{1}{a}$ ।

যে কোন P বিন্দুর ABC ত্রিভুজের বাহুগুলিতে প্রতিফলন বিন্দু p_1, p_2, p_3 নীচে দেওয়া হল ঃ

$$p_1+bc\bar{p}=b+c,\quad p_2+ca\bar{p}=c+a,\quad p_3+ab\bar{p}=a+b \qquad \ldots \quad (4.61)$$

যেহেতু $\bar{t}=\frac{1}{t}$, $z+\bar{z}t^2=2\rho t$ ।

উপরের প্রথম সমীকরণ হতে দেখতে পাই যে বামদিকের দুইটি অনুবন্ধী জটিল রাশির যোগফল বাস্তব। অতএব $z\bar{t}$ ও $\bar{z}t$ এর বাস্তব অংশ ρ । কাজেই $z\bar{t}=\rho+i\mu$ বা $z=t(\rho+i\mu)$, $t\bar{t}=1$, μ বাস্তব।

পুনরায় যদি কোন বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্কদ্বয় $\left(\frac{a+\bar{a}}{2}, \frac{a-\bar{a}}{2i}\right)$ যার ব্যাসার্ধ ρ,

$$(z-a)(\bar{z}-\bar{a})=\rho^2 \text{ বা } z-a=\rho e^{i\nu}, \ \bar{z}-\bar{a}=\rho e^{-i\nu}, \ \nu \text{ বাস্তব।}$$

এরপর হতে জটিল রাশির বীজগণিতে ব্যবহারের ধাপগুলি কি করে বাস্তব রাশি হতে পাওয়া গিয়েছে তা বুঝতে অসুবিধা হবে না।

ধরা যাক $z=x+iy$, $\bar{z}=x-iy$ এবং অতএব $z\bar{z}=x^2+y^2$ । ... (4·53)

$\bar{z}$ জটিল রাশি z-এর অনুবন্ধী। আমাদের সরলরেখার উপর কোন বিন্দুকে নির্দেশ করতে হলে

$$z=\rho t \text{ বা } z=t(\rho+\lambda i), \ \bar{z}=\frac{1}{t}(\rho-\lambda i), \ \rho, \lambda \text{ বাস্তব} \quad \dots \quad (4{\cdot}54)$$

লিখতে হবে। অতএব

$$z+t^2\bar{z}=2\rho t \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (4{\cdot}55)$$

সরলরেখার সমীকরণ যেখানে $\bar{t}=\frac{1}{t}$ বা $t\bar{t}=1$ । অনুরূপ, বৃত্তের সমীকরণ

$$z-a=\rho t, \quad \bar{z}-\bar{a}=\rho/t, \quad \sigma=a\bar{a}-\rho^2 \quad \dots \quad (4{\cdot}56)$$

t_1, t_2 বিন্দুদ্বয় যোগকারী সরলরেখার সমীকরণ

$$z+t_1t_2\bar{z}=t_1+t_2 \quad \dots \quad \dots \quad (4{\cdot}57)$$

যেহেতু $t_1\bar{t_1}=1$, $t_2\bar{t_2}=1$, t_1, t_2 উভয় বিন্দুই (4·57) সমীকরণের, সমাধান। অথবা সহজভাবে

t_1 এবং t_2 যুক্তকারী সরলরেখার সমীকরণ

$z=(1-\lambda)\,t_1+\lambda t_2$ (λ বাস্তব)

অতএব $\bar{z}=(1-\lambda)\,\bar{t}_1+\lambda_2\bar{t}_2$। কাজেই যদি $|t_1|=|t_2|=1$ হয়, তবে

$$z+z\bar{t}_1t_2=(1-\lambda)t_1+\lambda t_2+(1-\lambda)t_2+\lambda t_1$$
$$=t_1+t_2$$

ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি ইহার পরিকেন্দ্র O অপেক্ষা নির্দিষ্ট করতে পারা যায়। এবং এই পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ একক ধরতে পারি। ধরা যাক A, B, C শীর্ষগুলি a, b, c জটিল রাশিগুলি দিয়ে নির্দেশ করলাম। কাজেই ইহাদের ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক

$$g=\tfrac{1}{3}(a+b+c) \qquad \ldots \qquad \ldots \quad (4{\cdot}58)$$

ABC ত্রিভুজের লম্ববিন্দুর স্থানাঙ্ক

$$h=(a+b+c) \qquad \ldots \qquad \ldots \quad (4{\cdot}59)$$

কারণ, যদি ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ একক ধরে নেওয়া যায় এবং h দিয়ে লম্ববিন্দুর স্থানাঙ্ক জটিলরাশির সাহায্যে লেখা হয়, তবে

$$\frac{h-b}{\bar{h}-\bar{b}}=-\frac{c-a}{\bar{c}-\bar{a}} \quad \text{এবং} \quad \frac{h-c}{\bar{h}-\bar{c}}=-\frac{a-b}{\bar{a}-\bar{b}}, \quad \text{যেহেতু}$$

$\arg\left(\dfrac{z}{\bar{z}}\right)=2\arg z$। অতএব এই দুইটি সমীকরণের সমাধান করে পাই

$$h=a+b+c\text{।}$$

এখানে অবশ্যই মনে রাখতে হবে যে $\bar{a}=\dfrac{1}{a},\ \bar{b}=\dfrac{1}{b},\ \bar{c}=\dfrac{1}{c}$।

অতএব $OH=3OG$ যেখানে O, ABC এর পরিকেন্দ্র। OGH অয়েলার রেখা। AH রেখা BC বাহুর উপর লম্ব। উপরন্তু (4·59) হতে

$$\bar{h}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\sum\frac{bc}{abc} \qquad \ldots \quad (4.60)$$

যেহেতু $\bar{h}=(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})=\sum\dfrac{1}{a}$।

যে কোন P বিন্দুর ABC ত্রিভুজের বাহুগুলিতে প্রতিফলন বিন্দু p_1, p_2, p_3 নীচে দেওয়া হল :

$$p_1+bc\bar{p}=b+c,\quad p_2+ca\bar{p}=c+a,\quad p_3+ab\bar{p}=a+b \qquad \ldots \quad (4.61)$$

যদি P বিন্দুকে p জটিলরাশি দিয়ে নির্দেশ করা যায়। (4.61) এর রাশিপদগুলির ব্যুৎপত্তির একটু ব্যাখ্যা দরকার। BC বাহুর সমীকরণে

$$z+bc\bar{z}=b+c, \quad b\bar{b}=1, \quad c\bar{c}=1 \qquad \cdots \quad (4.62)$$

$z=\frac{p+p_1}{2}$ বসিয়ে (4.62) হতে পাই

$$\frac{p+p_1}{2}+bc\,\frac{\bar{p}+\bar{p}_1}{2}=(b+c) \text{ অর্থাৎ}$$

$$(p+p_1)+bc\,(\bar{p}+\bar{p}_1)=2(b+c)\text{।} \qquad \cdots \quad (4.63)$$

(4.63), $p_1+bc\bar{p}=(b+c)$ এর সমার্থক, কারণ ইহার প্রতিবন্ধী রাশি

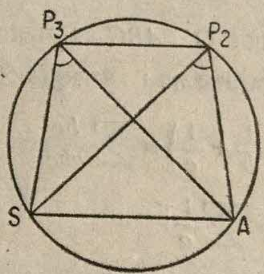
$$\bar{p}_1+\frac{1}{bc}\,p=\frac{b+c}{bc} \quad \text{যেহেতু} \quad b\bar{b}=c\bar{c}=1\text{।}$$

রাশিপদগুলি ও উহাদের প্রতিবন্ধী রাশিপদগুলি যোগ করলে (4·63) ফিরে পাই। অতএব প্রমাণিত হল যে P বিন্দু ও তার BC বাহুর প্রতিফলনবিন্দুর মধ্যবিন্দু BC বাহুতে অবস্থিত। অনুরূপ অন্যান্য বাহুর ক্ষেত্রেও সত্য।

যদি S বিন্দুকে s দিয়ে নির্দেশ করি, P_1, P_2, P_3-কে যথাক্রমে p_1, p_2, p_3 দিয়ে নির্দেশ করি, SAP_2P_3 বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ যদি

$$\frac{(s-p_2)(a-p_3)}{(s-p_3)(a-p_2)} \qquad \cdots \qquad \cdots \quad 4.64$$

বাস্তব হয়। 4.17 নং চিত্র দ্রষ্টব্য। SAP_2P_3 বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ হলে



4.17 নং চিত্র

$\angle SP_3A=\angle SP_2A$ অর্থাৎ

$$\arg\left(\frac{s-p_2}{a-p_2}\right)=\arg\left(\frac{s-p_3}{a-p_3}\right)$$

বা $\arg \dfrac{(s-p_2)(a-p_3)}{(a-p_2)(s-p_3)}=0$ অর্থাৎ

$$\frac{(s-p_2)(a-p_3)}{(s-p_3)(a-p_3)} \text{ বাস্তব।}$$

কিন্তু p_2, p_3 এর মান (4.61) হতে বসিয়ে

$$\frac{(a-p_3)}{(a-p_2)}=\frac{ab\bar{p}-b}{ac\bar{p}-c}=\frac{b}{c} \text{।} \qquad \ldots \qquad \ldots \quad (4.65)$$

(4.65) হতে সিদ্ধান্তে আসি যে $\angle P_2AP_3=\angle COB=\angle 2A$। ... (4.66)

এখন $\dfrac{b}{c}\dfrac{(s-p_2)}{(s-p_3)}$ বাস্তব রাশি হবে যদি

$$\frac{b}{c}\frac{(s-p_2)}{(s-p_3)}=\frac{c}{b}\frac{(\bar{s}-\bar{p}_2)}{(s-p_3)} \text{ যেহেতু } \bar{b}=\frac{1}{b},\ \bar{c}=\frac{1}{c}\text{।} \qquad (4.67)$$

p_2, p_3-এর মান বসিয়ে নিয়ে (4.67) হতে পাই

$$a(b+c)s\bar{s}-s(h-p)-\bar{s}a^2bc(\bar{h}-\bar{p})+a^2-ap+abc(\bar{h}-\bar{p})=0$$
$$\ldots \quad (4.68)$$

(4.68) SAP_2P_3 বৃত্তের সমীকরণ। এখন S বিন্দু যদি $q\bar{q}=1$ বৃত্তস্থ বিন্দু হয়

$$q(h-p)+q^{-1}a^2bc(h-p)=a(h-p)+abc(\bar{h}-\bar{p}) \qquad \ldots \quad (4.69)$$

স্পষ্টতঃই $q=a$ (4.69)-এর একটি সমাধান। ইহার অপর সমাধান

$$q=abc\,\frac{(\bar{h}-\bar{p})}{(h-p)}\text{।} \qquad \ldots \qquad \ldots \quad (4.70)$$

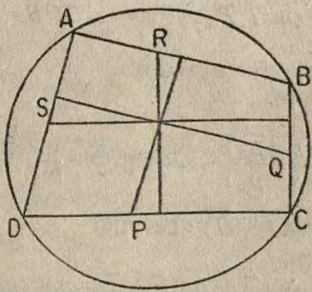
(4.70) এর রাশির প্রতিসাম্য লক্ষ্য করলে সিদ্ধান্তে আসতে পারি যে QBP_3P_1, QCP_1P_2 চতুর্ভুজ দুইটিও বৃত্তস্থ অর্থাৎ AP_2P_3, BP_1P_3, CP_1P_2, ABC বৃত্তগুলি সমবিন্দু।

2.3. কোন বিন্দুর ত্রিভুজের বাহুগুলিতে প্রতিফলন বিন্দুগুলির সাহায্যে তিনটি ত্রিভুজের পরিবৃত্তগুলি সমবিন্দু জটিল রাশির ব্যবহার করে প্রমাণ দেওয়া হয়েছে। অনুরূপ বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের সিম্‌সন্ রেখার ধর্ম নির্ণয় করতে জটিল রাশির বীজগণিতের ব্যবহার দেখান যেতে পারে। নীচের লেখা ধর্মগুলি জটিলরাশির সাহায্যে প্রমাণ করা হবে (4.18 নং চিত্র দ্রষ্টব্য):

(*a*) P, Q, R, S যথাক্রমে DC, CB, BA, AD-এর মধ্যবিন্দু। P, Q, R, S বিন্দু হতে যথাক্রমে DC, CB, BA, AD-এর উপর লম্বগুলি সমবিন্দু।

(*b*) BCD ত্রিভুজের A অপেক্ষা সিম্‌সন্ রেখা এবং অনুরূপ আরও তিনটি সিম্‌সন্ রেখা X-বিন্দুতে সমবিন্দু।

(*e*) যদি PR, QS রেখা দুইটি T বিন্দুতে ছেদ করে, তবে T বিন্দু OX রেখার মধ্যবিন্দু।



4.18 নং চিত্র

ধরা যাক $ABCD$ বৃত্তের সমীকরণ $x^2+y^2=1$। θ বৃত্তের উপরের একটি বিন্দু। θ বিন্দু হতে α, β-এর যোগকারী রেখার উপর লম্বপাদবিন্দু z হলে,

$$2z=e^{i\theta}+e^{i\alpha}+e^{i\beta}-e^{i(\alpha+\beta-\theta)},\quad a=e^{i\alpha},\ b=e^{i\beta},\ c=c^{i\gamma},$$

$d=e^{i\delta}$। ... ... (4.71)

উপরের রাশির ব্যুৎপত্তির সরল কয়েকটি ধাপ দেওয়া হল। পূর্বের অনুচ্ছেদে দেখান হয়েছে যে $e^{i\theta}$ বিন্দুর b_1, c_1 বিন্দু দুইটির যোগকারী রেখার প্রতিফলন বিন্দু নীচের সম্বন্ধ হতে পাওয়া যায় ঃ

$$p_1+b_1c_1(e^{\overline{i\theta}})=b_1+c_1 \qquad \text{... (4.72)}$$

যদি z বিন্দু $e^{i\theta}$ বিন্দু হতে $b_1\ c_1$ রেখার লম্বপাদবিন্দু হয় এবং যদি $b_1=e^{i\alpha}$, $c_1=e^{i\beta}$,

$$2z=e^{i\theta}+p_1=e^{i\theta}-b_1c_1e^{-i\theta}+b_1+c_1$$

$$=e^{i\theta}+e^{i\alpha}+e^{i\beta}-e^{i(\alpha+\beta-\theta)},\ (i=\sqrt{-1})।$$

কাজেই বৃত্তস্থ α বিন্দু হতে β, γ বিন্দু দুইটি যোগকারী রেখার উপর লম্বপাদবিন্দু

$$\frac{1}{2}\left(a+b+c-\frac{bc}{a}\right)। \qquad \text{... ... (4.73)}$$

মূলবিন্দু O হতে $\frac{1}{2}(a+b+c+d)$ তে সরিয়ে নিলে, (4.73) এর পাদবিন্দু হবে

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a}+d\right) \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (4.74)$$

(4.74) হতে বৃত্তস্থ ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজের অনেক ধর্ম পাওয়া যাবে। (4.74) হতে $-\frac{1}{2}$ উৎপাদকটি ভবিষ্যৎ বিশ্লেষণের কোন ক্ষতি না করেই অপনয়ন করতে পারা যায়। $\alpha^{s}\beta\gamma$, α বিন্দু হতে β, γ এর উপর লম্বের পাদবিন্দু নির্দেশ করলে

$$z_1=\alpha^{s}\beta\gamma=\frac{bc}{a}+d,\quad z_2=\alpha^{s}\gamma\delta=\frac{cd}{a}+b,$$

$$z_3=\alpha^{s}\delta\beta=\frac{bd}{a}+c \qquad \ldots \qquad (4.75)$$

z_1, z_2, z_3 জটিল রাশিগুলি নির্দেশক। বিন্দুগুলি সমরেখ হবে যদি যে কোন দুইটি বিন্দুকে যোগকারী রেখার উপর অপর বিন্দুও অবস্থিত থাকে। অতএব

$$\lambda\left(\frac{bc+ad}{a}\right)+\mu\left(\frac{cd+ab}{a}\right)=(\lambda+\mu)\left(\frac{bd+ac}{a}\right), \qquad \ldots \qquad (4.76)$$

λ ও μ বাস্তব সংখ্যা।

$\frac{\lambda}{\mu}$—অপেক্ষা সমাধান করে (4.76) হতে পাওয়া যাবে

$$\frac{\lambda}{\mu}=\frac{(b-c)(a-d)}{(a-b)(c-d)} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (4.77)$$

(4.77) এর রাশিটি বাস্তব, যেহেতু

$$\arg\left(\frac{b-c}{c-d}\right)+\arg\left(\frac{a-d}{c-d}\right)=\pi$$ কারণ চতুর্ভুজ a, b, c, d বৃত্তস্থ। এখন তবে এই সিদ্ধান্ত নেওয়া যেতে পারে যে বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের যে কোন শীর্ষবিন্দুর অপেক্ষা অপর শীর্ষগুলির সৃষ্ট ত্রিভুজ হতে সিম্‌সন্ রেখা পাওয়া যায়।

পরের আলোচ্য বিষয় বৃত্তস্থ ত্রিভুজগুলির সিম্‌সন্ রেখাগুলির সমবিন্দু হওয়ার ধর্ম। $\alpha^{s}\gamma\delta$ ও $\alpha^{s}\delta\beta$ বিন্দু দুইটিকে যোগকারী রেখার $\lambda : \mu$ অনুপাতে ছেদকারী বিন্দুর নির্দেশক জটিল রাশি

$$z_k=\left\{\lambda\left(b+\frac{cd}{a}\right)+\mu\left(c+\frac{bd}{a}\right)\right\}\Big/(\lambda+\mu)$$

অর্থাৎ

$$(\lambda+\mu)z_k=2\left\{\lambda\cos\frac{1}{2}(\gamma+\delta-\alpha-\beta)+\mu\cos\frac{1}{2}(\beta+\delta-\alpha-\gamma)\right\}\times$$

$$\exp\frac{i}{2}(\beta+\gamma+\delta-\alpha)\text{।} \qquad \ldots \qquad (4.78)$$

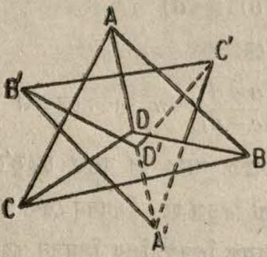
$\lambda : \mu$ অনুপাত বাস্তব হতে হলে $z_k = 0$ ধরে নিতে হবে। অতএব $\measuredangle^z \gamma\delta$, $\measuredangle^z \delta\beta$ যোগকারী রেখা মূলবিন্দুগামী অর্থাৎ $\frac{1}{3}(a+b+c+d)$ বিন্দুগামী। অনুরূপে অপর ত্রিভুজের অপেক্ষা সিম্‌সন্ রেখাগুলিও ঐ একই $\frac{1}{3}(a+b+c+d)$ বিন্দুগামী।

(a) এবং (c) এর প্রমাণ উপরের বিশ্লেষণ হতেই পাওয়া যায়। এই পরিচ্ছেদের শেষে প্রশ্নাবলীতে এদের স্থান করে দেওয়া হল। বিশদ আলোচনার জন্য সিস্টারের [13] নাম উল্লেখ করা হল।

3. ত্রিভুজের বাহুগুলিতে বিন্দুর প্রতিফলনের উপপাদ্যের বিশদ আলোচনা করা হয়েছে। অনুরূপ ধর্ম চতুষ্কোণের ক্ষেত্রেও প্রতিষ্ঠিত করা যেতে পারে। একটি উপপাদ্য নিম্নরূপ :

ধরা যাক A', B', C', D' চতুষ্কোণের চারটি ত্রিভুজের চারটি পরিকেন্দ্র ($ABCD$ চতুষ্কোণ)। প্রমাণ করতে হবে যে A, B, C, D $B'C'D'$, $C'D'A'$, $D'A'B'$, A', B', C' পরিবৃত্তগুলিতে প্রতিফলনগুলি সবকয়টিই একমাত্র বিন্দু P' এ আপতিত।

4.19 নং চিত্র দ্রষ্টব্য। ধরা যাক R_A', R_B', R_C', R_D', $ABCD$



4.19 নং চিত্র

চতুষ্কোণের চারটি ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধগুলি। অনুরূপ A'', B'', C'', D'' ও R_A'', R_B'', R_C'', R_D'' যথাক্রমে $B'C'D'$, $C'D'A'$, $D'A'B'$, $A'B'C'$ ত্রিভুজগুলির পরিকেন্দ্র এবং পরিবৃত্তগুলির ব্যাসার্ধ নির্দেশ করে। $ABCD$ চতুষ্কোণ এবং $A''B''C''D''$ চতুষ্কোণ সদৃশরূপী কারণ উভয়ের অনুরূপ বাহুগুলি $A'B'C'D'$ এর বাহুগুলির প্রতি লম্ব। সদৃশরূপী হয়ে বৃহৎ হওয়ার কেন্দ্রকে E দিয়ে নির্দেশিত করা হল। প্রমাণিত করা হবে যে A, E বিন্দু দুইটি

$B'C'D'$ বৃত্তের অপেক্ষা বিপরীত বিন্দু। অনুরূপ BCD ত্রিভুজের ক্ষেত্রেও পাওয়া যাবে। অতএব প্রমাণ করতে হবে যে

$$\frac{EB'}{B'A}=\frac{EC'}{C'A}=\frac{ED'}{D'A} \qquad \ldots \qquad \ldots \quad (4.79)$$

যেহেতু $B'A=R_B'$, $C'A=R_C'$, $D'A=R_D'$, (4.79) দাঁড়ায়

$$\frac{EB'}{R_B'}=\frac{EC'}{R_C'}=\frac{ED'}{R_D'}।$$

চারটি ত্রিভুজের অনুরূপ সম্বন্ধ লিখলে প্রমাণ করতে হবে যে

$$\frac{EA'}{R_A'}=\frac{EB'}{R_B'}=\frac{EC'}{R_C'}=\frac{ED'}{R_D'} \qquad \ldots \quad (4.80)$$

জানা আছে যে

$$R_A'=\frac{BC}{2\sin\angle BDC},\ \angle BDC=\angle C'A'B',$$

$\angle BAC=\angle C'D'B'$। অতএব

$$\frac{R_A'}{R_D'}=\frac{R_D'}{R_A'} \text{ অর্থাৎ } \frac{A'D}{D'A}=\frac{A'D'}{D'A''}। \qquad \ldots \quad (4.81)$$

সুতরাং $\angle DA'D''=\angle AD'A''$ অর্থাৎ $DA'D''$, $AD'A''$ ত্রিভুজ দুইটি সদৃশ।

অতএব $\quad \dfrac{EA}{ED}=\dfrac{AA''}{DD''}$ (সদৃশরূপী চতুষ্কোণ দুইটি হতে)

$$=\frac{D'A}{A'D} \quad \text{(সদৃশ ত্রিভুজ দুইটি হতে)}$$

এবং যেহেতু $\angle EAD'$ ও $\angle EDA'$ সমান, EAD' ও EDA' ত্রিভুজ দুইটি সদৃশ। সুতরাং

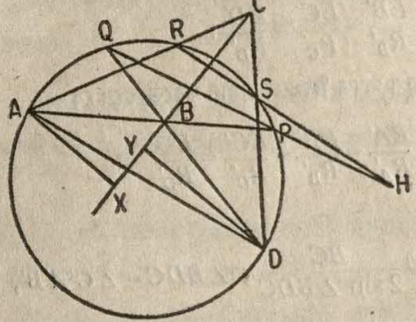
$$\frac{EA'}{A'D}=\frac{ED'}{D'A} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \quad (4.82)$$

(4.82) প্রস্তাবিত উপপাদ্য প্রমাণিত করে। E বিন্দুকে $A'B'C'D'$ চতুষ্কোণের সমাক্ষ বিন্দু। বিশদ আলোচনার জন্য প্যারী ও লংগেট্-হিগিন্স [14], উড্ [15] এবং ম্যালিসন্ [16] এর প্রবন্ধের উল্লেখ করা হল।

3·1. চতুষ্কোণ বিষয়ে আরও কয়েকটি উপপাদ্যের প্রমাণ দেওয়া সঙ্গত হবে। কোন চতুষ্কোণের ত্রিভুজের লম্বপাদ বিন্দু বৃত্তগুলির ব্যাসার্ধের অনুরূপ ত্রিভুজের

পরিবৃত্তের ব্যস্ত অনুপাতী ব্যাসার্ধের সম্বন্ধের সংশ্লেষণাত্মক প্রমাণের পথে অনেকগুলি কৌতূহলোদ্দীপক উপপাদ্য পাওয়া যায়।

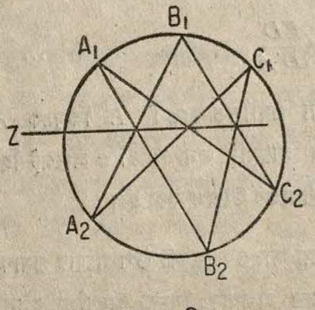
ধরা যাক c বৃত্তের ব্যাস AD ও কেন্দ্র M। $ABCD$ চতুষ্কোণ এবং c বৃত্ত BA, BD, CA, CD বাহুগুলিকে যথাক্রমে P, Q, R, S বিন্দুতে ছেদ করে।



4.20 নং চিত্র

AX, DY রেখাগুলি যথাক্রমে BC এর উপর A, D বিন্দু হতে লম্ব টানা হয়েছে। PQ, RS রেখা দুইটি H বিন্দুতে মিলিত হয়েছে, PR, QS রেখাদ্বয় K বিন্দুতে ও PS, QR মিলিত হয়েছে L বিন্দুতে। 4.20 নং চিত্র দ্রষ্টব্য।

আরও দূরে অগ্রসর হওয়ার আগে একটি বিখ্যাত উপপাদ্য প্যাস্কালের উপপাদ্যের প্রতিপাদ্য বিষয় ও সহজ সরল প্রমাণ দেওয়া দরকার। 4.21 নং চিত্র দ্রষ্টব্য। $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ একটি বৃত্তস্থ ষড়ভুজ হলে, A_1B_2 ও A_2B_1 রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু, A_1C_2 ও A_2C_1 এর ছেদবিন্দু এবং B_1C_2, B_2C_1 এর ছেদবিন্দু সমরেখ। বস্তুতঃ



4.21 নং চিত্র

প্যাস্কাল এই উপপাদ্য যে কোন শঙ্কুচ্ছেদের অর্থাৎ উপবৃত্ত, বৃত্ত, অধিবৃত্তের জন্য তাঁর মাত্র ষোল বছর বয়সে প্রমাণ করেছিলেন। শঙ্কুচ্ছেদগুলির চিত্রগুলি মেনায়েকমাস্ খৃষ্টপূর্ব চতুর্থ শতাব্দীতে আবিষ্কার করেছিলেন। সম্ভবতঃ এই রেখা-চিত্রগুলি জ্যামিতির পাঠ্য বিষয় হয়ে চিরকাল থেকে যাবে। যাহোক আমরা বৃত্ত ও সরলরেখাতে আলোচনা আবদ্ধ রেখেছি। এবং প্রমাণের জন্য যতটা সহজ পদ্ধতি সম্ভব ততটা অবলম্বন করেছি।

ধরা যাক $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ একক ব্যাসার্ধের বৃত্তস্থ বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক $a_1,\ b_1,\ c_1,\ b_2,\ c_2\ a_2$, জটিল রাশি দিয়ে নির্দিষ্ট হল। $z=x+iy,\ z^*=x-iy$। অতএব $A_1B_2,\ A_2B_1$ এর রেখা দুইটির সমীকরণ যথাক্রমে

$$\left.\begin{aligned} z+a_1b_2z^* &= a_1+b_2, \\ z+a_2b_1z^* &= a_2+b_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad \ldots \quad (4.83)$$

$a_1{}^*=\dfrac{1}{a_1}$, $b_1{}^*=\dfrac{1}{b_1}$, ...ইত্যাদি। z_1 যদি এই রেখা দুইটির ছেদবিন্দু হয়

$$z_1+a_1b_2z_1{}^*=a_1+b_2,\quad z_1+a_2b_1z_1{}^*=a_2+b_1 \quad \ldots \quad (4.84)$$

অনুরূপে B_1C_2 ও C_1B_2 এর ছেদবিন্দু z_2 এবং A_1C_2 ও A_2C_1 এর ছেদবিন্দু z_3 নীচের সহগসমীকরণ দুইটি হতে পাই :

$$z_2+b_1c_2z_2{}^*=b_1+c_2,\ z_2+b_2c_1z_2{}^*=b_2+c_1, \quad \ldots \quad (4.85)$$

$$z_3+c_1a_2z_3{}^*=c_1+a_2,\ z_3+c_2a_1z_3{}^*=c_2+a_1 \quad \ldots \quad (4.86)$$

z_1, z_2, z_3 সমরেখ হতে হলে আমরা প্রথমে $z_1,\ z_3$ এর মান নির্ণয় করব। (4.84) এবং (4.86) হতে পাই :

$$z_1{}^*=\frac{a_2+b_1-b_2-a_1}{a_1b_2-a_2b_1},\quad z_1=\frac{\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{b_1}-\dfrac{1}{b_2}-\dfrac{1}{a_1}}{\dfrac{1}{a_1b_2}-\dfrac{1}{a_2b_1}}, \quad \ldots \quad (4.87)$$

$$z_3{}^*=\frac{c_2+a_1-c_1-a_2}{c_1a_3-c_2a_1},\quad z_3=\frac{\dfrac{1}{c_2}+\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{c_1}-\dfrac{1}{a_2}}{\dfrac{1}{c_1a_2}-\dfrac{1}{c_2a_1}} \quad \ldots \quad (4.88)$$

অনুরূপে

$$\therefore \quad z_2^* = \frac{b_1 + c_2 - b_2 - c_1}{b_1c_2 - b_2c_1}, \quad z_2 = \frac{\frac{1}{b_1} + \frac{1}{c_2} - \frac{1}{b_2} - \frac{1}{c_1}}{\frac{1}{b_1c_2} - \frac{1}{b_2c_1}} \quad \ldots \quad (4.89)$$

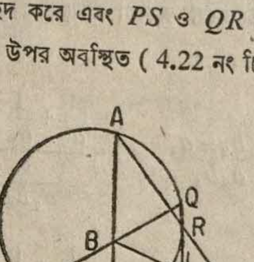
z_1, z_3 জটিলরাশি নির্দেশিত বিন্দু দুইটি দিয়ে রেখার উপর z_2 থাকতে হলে,

$$z_2^* + z_1^* z_3^* z_2 = z_1^* + z_3^* \quad \ldots \quad (4.90)$$

প্রমাণ করতে হবে। (4.87), (4.88) ও (4.89) হতে z_1, z_2, z_3, z_1^*, z_2^*, z_3^* এর মান বসিয়ে সামান্য বীজগণিতের প্রক্রিয়া প্রয়োগে (4.90) প্রমাণিত হয়। বীজগণিতের সাধারণ প্রক্রিয়াগুলি প্রয়োগের জন্য জটিলরাশি প্রয়োগ সত্ত্বেও সরলীকরণ দীর্ঘায়িত হয়ে গিয়েছে। প্রক্ষেপ জ্যামিতির প্রথায় প্রমাণ সংক্ষিপ্ত হলেও প্রথার প্রাথমিক পরিচিতি যথেষ্ট দীর্ঘ করতে হত। প্যাস্কালের উপপাদ্যের 150 বছর প্রায় পরে ইহার দ্বৈতকরণ আবিষ্কার হয় অর্থাৎ প্রমাণিত হয় যে যদি কোন ষড়ভুজ বৃত্তের উপর বহির্লিখিত হয়, তবে ছয়টি স্পর্শবিন্দু A^1, B^1, C^1, A^2, B^2, C^2 এমনভাবে অবস্থিত হবে যে–

A^1B^2 ও B^1A^2 এর ছেদবিন্দু, B^1C^2 ও C^1B^2 এর ছেদবিন্দু, C^1A^2 ও A^1C^2 এর ছেদবিন্দু তিনটি সমরেখ। এই উপপাদ্য যে কোন শঙ্কুচ্ছেদ রেখাচিত্রের জন্য প্রমাণিত হয়েছে। প্যাস্কালের এত অল্পবয়সে প্রতিভার বিকাশ দর্শনীয় (1662 c.)।

আমরা এখন পুনরায় পূর্বের প্রস্তাবিত উপপাদ্যের প্রমাণের আলোচনায় ফিরে আসছি। 4.20 নং চিত্রের $AQRSPD$ বৃত্তস্থ ষড়ভুজের প্রতি প্যাস্কালের উপপাদ্য প্রয়োগ করলে, যেহেতু DQ, AP রেখা দুইটি B বিন্দুতে ছেদ করে, DS, AR রেখা দুইটি C বিন্দুতে ছেদ করে এবং PS ও QR রেখা দুইটি L বিন্দুতে ছেদ করে, L বিন্দু BC রেখার উপর অবস্থিত (4.22 নং চিত্র দ্রষ্টব্য)। পুনরায়



4.22 নং চিত্র

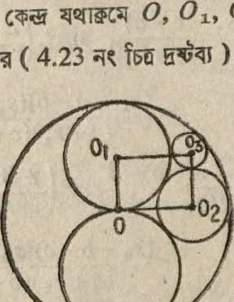
বৃত্তস্থ চতুষ্কোণ থেকে পাই

$\angle RPS = \angle RDS = \angle RYC$, যেহেতু R, Y বিন্দু দুইটি DC ব্যাসের উপর অঙ্কিত বৃত্তের উপর অবস্থিত। অতএব L বিন্দু PRY ত্রিভুজের পরিবৃত্তের উপর অবস্থিত। এবং PRY ত্রিভুজ D বিন্দু অপেক্ষা $ABCD$ চতুষ্কোণের লম্বপাদ ত্রিভুজ। অর্থাৎ ইহার পরিবৃত্ত লম্বপাদবৃত্ত। অনুরূপে L বিন্দু A অপেক্ষা $ABCD$ চতুষ্কোণের লম্বপাদবৃত্তের উপর অবস্থিত।

c বৃত্তের সহিত উপরিউক্ত দুইটি লম্বপাদবৃত্তের সাধারণ জ্যা দুইটি K বিন্দুতে ছেদ করে। অর্থাৎ K বিন্দু লম্বপাদবৃত্তের সাধারণ জ্যার উপর অবস্থিত। অতএব KL রেখা A এবং D অপেক্ষা $ABCD$ চতুষ্কোণের লম্বপাদগুলির মূল অক্ষ।

ধরা যাক s, t দিয়ে BPQ, CRS ত্রিভুজ দুইটির পরিবৃত্তগুলি নির্দেশ করা গেল এবং O_1, O_2 তাদের কেন্দ্র। যেহেতু K, L বিন্দু দুইটি c বৃত্ত অপেক্ষা অনুবন্ধী, ইহাদের যে কোন একটি বিন্দু c বৃত্তের বাহিরে অবস্থিত। ধরা যাক K বিন্দুই বাহিরে অবস্থিত এবং ধরা যাক k বৃত্তের K কেন্দ্র ও c বৃত্তকে সমকোণে ছেদ করে। অতএব c বৃত্ত s, t উভয় বৃত্তকেই সমকোণে ছেদ করে। অর্থাৎ M বিন্দু হতে s, t, k বৃত্তের স্পর্শকগুলির দৈর্ঘ্য সমান।

4. পূর্বের অনুচ্ছেদগুলিতে বৃত্তে অন্তর্লিখিত ত্রিভুজ বা চতুর্ভুজের ধর্ম আলোচনা করেছি। ইহার বিপরীত প্রশ্ন বৃত্তের মধ্যে বৃত্তের অন্তর্লিখন আলোচনা করব। অয়েলার রেখার ন্যায় ধর্ম একটি বৃত্তের মধ্যে চারটি স্পর্শক বৃত্ত প্রকাশ করতে পারে। চারটি বৃত্তের কেন্দ্র যথাক্রমে O, O_1, O_2, O_3 এবং বৃত্তের মালার সকলেই পরস্পরকে স্পর্শ করে (4.23 নং চিত্র দ্রষ্টব্য)।



4.23 নং চিত্র

এক্ষেত্রে O, O_1, O_2, O_3 কেন্দ্রগুলি আয়তক্ষেত্র সৃষ্টি করে। প্রমাণ করতে হবে যে O_3, O_2, O_1 বৃত্তগুলির ব্যাসার্ধগুলির অনুপাত $1 : 2 : 3$। সরল প্রমাণের জন্য

বৃহত্তম বৃত্তের ব্যাসার্ধ ধরি R। সুতরাং $OO_1 = \frac{R}{2}$ এবং O_1O, OO_3 যথাক্রমে $\frac{R}{2}$

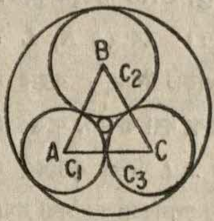
$R-r_3$ যদি r_3, O_3 কেন্দ্রের বৃত্তের ব্যাসার্ধ হয়। অতএব

$$OO_3{}^2 = OO_1{}^2 + O_1O_3{}^2 \quad \text{অর্থাৎ}$$

$$(R-r_3)^2 = \frac{R^2}{4} + \left(\frac{R}{2} + r_3\right)^2 \qquad \dots \quad (4.91)$$

(4.91) হতে পাই $r_3 = R/6$। O_2 কেন্দ্রের বৃত্তের ব্যাসার্ধ $\frac{R}{2} - \frac{R}{6} = \frac{R}{3}$ এবং নির্ণেয় ব্যাসার্ধগুলির অনুপাত $\frac{R}{6} : \frac{R}{3} : \frac{R}{2}$ অর্থাৎ $1 : 2 : 3$।

4.1. পরের উদাহরণরূপে চারটি বৃত্ত পরস্পর স্পর্শ করেছে এবং সেক্ষেত্রে বৃত্তটির ব্যাসার্ধ নির্ণয় করা। 4.24 নং চিত্র দ্রষ্টব্য।



4.24 নং চিত্র

C_1, C_2, C_3 বৃত্তের ব্যাসার্ধ a, b, c। 4.24 নং চিত্র হতে তিনটি সমীকরণ পাই।

$$AK_1 = a + r_1,\ BK_1 = b + r_1,\ CK_1 = c + r_1,$$
$$s_1 = a + c + r_1,\ s_2 = b + c + r_1,\ s_3 = a + b + r_1 \text{।}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\cos^2\left(\frac{\angle AK_1C}{2}\right) = \frac{s_1(s_1-c-a)}{(a+r_1)(c+r_1)},\ \sin^2\left(\frac{\angle AK_1C}{2}\right) = \frac{(s_1-a-b)(s_1-b-c)}{(a+r_1)(c+r_1)},\\
&\cos^2\left(\frac{BK_1C}{2}\right) = \frac{s_2(s_2-a-b)}{(a+r_1)(b+r_1)},\ \sin^2\left(\frac{\angle BK_1C}{2}\right) = \frac{(s_2-b-c)(s_2-c-a)}{(a+r_1)(b+r_1)},\\
&\cos^2\left(\frac{\angle AK_1B}{2}\right) = \frac{s_3(s_3-b-c)}{(b+r_1)(c+r_1)},\ \sin^2\left(\frac{\angle AK_1B}{2}\right) = \frac{(s_3-a-c)(s_3-a-b)}{(b+r_1)(c+r_1)}
\end{aligned}\right\} \qquad \dots \quad (4.92)$$

যেহেতু $\frac{\angle AK_1C}{2}+\frac{\angle BK_1C}{2}+\frac{\angle AK_1B}{2}=\frac{\pi}{2}$, (4.92) হতে পাই

$$\frac{1}{r_{1,2}}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\pm 2\left(\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}\right)^{1/2} \quad \dots \quad (4.93)$$

স্বভাবতঃই $\frac{1}{r_2}$ ক্ষুদ্রতম বৃত্তের ব্যাসার্ধ ও $\frac{1}{r_1}$ বৃহত্তম বৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্দেশ করে।

যদি $r_1\to\infty$, $c\to 1$, $a\to\frac{b}{(1+\sqrt{b}\,)^2}$। বীজগণিতের প্রক্রিয়া নিশ্চিতই এক্ষেত্রে দীর্ঘ। বিস্তারিত জানার জন্য কোক্সিটার [17], হার্স্ট [18], রীস্ [19] এর নাম উল্লেখ করা হল।

5. আমরা অনেকগুলি সমরেখ বা সমবিন্দু সম্বন্ধে উপপাদ্য আলোচনা করছি। এদের অনেকগুলি জটিলরাশির বীজগণিতের সাহায্যে অতি সহজেই প্রমাণ করা যায়।

কোন সংরক্ষণকারী জটিল রাশির রূপান্তর

$$\sigma : z \to az+b,\ a\neq 0 \quad \dots \quad (4.94)$$

a, b জটিল রাশি হতে পারে। কোন সংরক্ষণকারী ধর্মের অর্থ যে কোন দুইটি ছেদের জন্য উৎপন্ন কোণ রূপান্তরিত রেখা দুইটির মধ্যস্থ কোণের সমান থাকে। যদি a এর মাপাঙ্ক $|a|=1$ হয় (4.94) রূপান্তর কেবলমাত্র ঘূর্ণন। যদি $|a|\neq 1$ হয়, রেখাগুলির কেবলমাত্র সঙ্কোচন বা সম্প্রসারণ হয়। পুনরায়, এমন রূপান্তর পাওয়া যেতে পারে যে

$\angle PQR$ কোণ স্থির আদর্শ কোণ $\angle EOR$-এ রূপান্তরিত হবে যখন E এবং O যথাক্রমে 1 ও 0 বিন্দুর অনুরূপ। সাধারণ রূপান্তর হিসাবে লেখা যেতে পারে

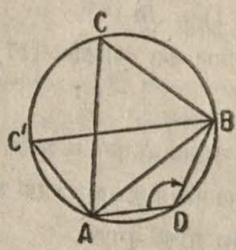
$$\sigma(PQ, P'Q') : z\to \frac{p'-q'}{p-q}z+\frac{pq'-p'q}{p-q} \quad \dots \quad (4.95)$$

(4·95) (p, q) কে (p', q') এ রূপান্তরিত করে। ইউক্লিডের নানা উপপাদ্য প্রমাণের জন্য নানারকম সুন্দর প্রণালী আছে। জ্যাকব্ স্টাইনার একটি রূপান্তরকরণ আবিষ্কার করেছিলেন যাতে

$\angle ACB+\angle BDA=\angle AC'B+\angle BDA=2$ সমকোণ (4.25 নং চিত্র দ্রষ্টব্য) অর্থাৎ বৃত্তস্থ C বিন্দু C' এ রূপান্তরিত হয় এবং A,B,D অপরিবর্তিত থাকে। যথা,

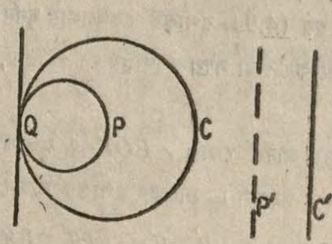
$$\sigma : z\to a+\frac{r}{z-\bar{a}};\ \infty,\ z=a;\ a,\ z=\infty \quad \dots \quad (4.96)$$

অর্থাৎ ∞, a স্থান পরিবর্তন করে। যদি A, B পরস্পর অনুবন্ধী হয় এবং $A \rightarrow B$ এ পরিবর্তিত হয়, $B \rightarrow A$ তে পরিবর্তিত হবে। অতএব r জটিল সংখ্যাটিকে পছন্দ করে নিলেই এরূপ পাওয়া যেতে পারে। অতএব (4.96) $ABCD$ রেখাচিত্রকে $BAC'D$ রেখাচিত্রে রূপান্তরিত করে। এরূপ রূপান্তর অন্তর্ভুক্ত কোণ দিক ঠিক রেখে রক্ষণ করে। অতএব আমরা ইউক্লিডের উপপাদ্য পাই যে একই বৃত্তচাপে অবস্থিত বৃত্তস্থ কোণগুলি সমান।



4.25 নং চিত্র

আমরা আর একটি নতুন উপপাদ্যের বা স্বতঃসিদ্ধের অবতারণা করব। 4.26 নং চিত্র দ্রষ্টব্য।

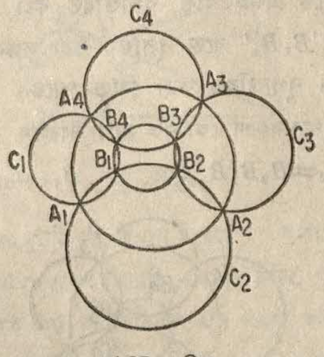


4.26 নং চিত্র

একটি নির্দিষ্ট বৃত্ত C তে Q বিন্দু অবস্থিত, কিন্তু P বিন্দু C বৃত্তে অবস্থিত নহে। রূপান্তরকরণে যদি $Q \rightarrow P_{\infty}$, $C \rightarrow C'$, তবে C বৃত্ত C' সরলরেখায় পরিণত হয়। যদি $P \rightarrow P'$, তবে P' বিন্দু দিয়ে C' সরলরেখার সমান্তরাল একটি মাত্র রেখা P' বিন্দু দিয়ে টানা সম্ভব।

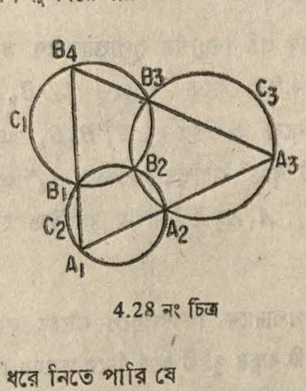
5.1. এর পরে মিকুয়েলের উপপাদ্যের আলোচনা করব। মিকুয়েলের উপপাদ্যের নাম উল্লেখ করে পূর্বে কিছুটা আলোচিত হয়েছে। মিকুয়েলের উপপাদ্য, প্যাস্কালের উপপাদ্য ও সিম্‌সনের উপপাদ্যের যোগসূত্রও কিছু উল্লেখ করা হবে।

ধরা যাক্ $C_i (i=1,2,3,4)$ চারটি নির্দিষ্ট বৃত্ত এবং এদের যে কোন তিনটির সাধারণ বিন্দু নাই। C_i, C_{i+1} বৃত্ত দুইটি A_i, B_i দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে A_i বিন্দুগুলি একই বৃত্তের উপর অবস্থিত যদি মাত্র B_i বিন্দুগুলিও অপর একটি মাত্র বৃত্তে অবস্থিত হয়। 4.27 নং চিত্র দ্রষ্টব্য। ইহাই মিক্যুয়েলের উপপাদ্য।



4.27 নং চিত্র

$A_1A_3B_4$ ত্রিভুজের A_1A_3 এর মাঝে A_2 অবস্থিত, A_3B_4 এর মাঝে B_3 বিন্দু অবস্থিত এবং A_1B_4 এর মাঝে B_1 বিন্দু অবস্থিত। অতএব যদি C_2 বৃত্ত অর্থাৎ $A_1A_2B_1$ এবং C_3 বৃত্ত অর্থাৎ $A_2A_3B_3$ এর B_2 দ্বিতীয় ছেদবিন্দু হয় $B_1B_3B_4$ বৃত্ত B_2 বিন্দু দিয়ে যায়। পাশাপাশি 4.28 নং চিত্র আঁকা হল।



4.28 নং চিত্র

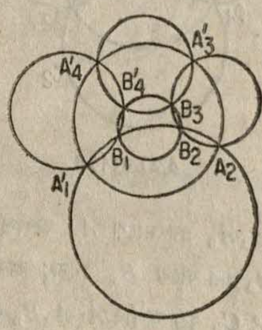
4.28 নং চিত্রে যদি ধরে নিতে পারি যে

$$\angle B_4B_3B_2 \backsimeq \angle B_2B_3A_3 \backsimeq \angle A_3A_2B_2 \backsimeq \angle B_2A_2A_1 \backsimeq \angle A_1B_1B_2 \backsimeq$$
$$\backsimeq \angle B_2B_1B_4 \text{ ($\backsimeq$ সম্পূরক অর্থবহ)} \quad \ldots \quad (4.97)$$

তবে তিনটি বৃত্ত C_1, C_2, C_3 পরস্পর ছেদ করেছে এবং B_3 সাধারণ ছেদবিন্দু ও B_1, B_3, A_2 যথাক্রমে C_1UC_2, C_1UC_3, C_2UC_3 ছেদবিন্দু এবং A_1B_1, B_1B_4 একই রেখা, B_4B_3, B_3A_3 একই রেখা ও A_3A_2, A_2A_1 একই রেখা। এখন জটিল রাশির রূপান্তরকরণ জানা আছে, যাতে

$$(p, q) \text{ বিন্দু দুইটি} \rightarrow (p', q') \qquad \cdots \quad (4.98)$$

এবং একটি সরলরেখাকে একটি বৃত্তে রূপান্তরিত করা যেতে পারে। কাজেই $A_1B_1B_4$ রেখাকে $A_1'B_1B_4'$ বৃত্তে রূপান্তর করা সম্ভব। অনুরূপ $B_4B_3A_3$ রেখা $B_4'B_3A_3'$ বৃত্তে রূপান্তরিত করা যেতে পারে। 4.29 নং চিত্র দ্রষ্টব্য। যেহেতু জটিল রাশির রূপান্তরকরণ কৌণিক মাপ সংরক্ষণ করে, (4.97) সম্বন্ধগুলি হতে যদি $\angle B_4B_3B_2 \backsimeq B_2B_1B_4$ হতে হয়, B_1, B_2, B_3, B_4' একই বৃত্তে

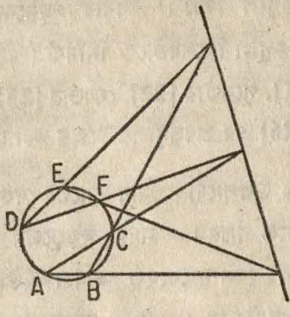


4.29 নং চিত্র

অবস্থিত। পুনরায় যেহেতু জটিল রাশির রূপান্তরকরণে সরলরেখা সাধারণতঃ বৃত্তে পরিণত হয় এবং (4.97) হতে যেহেতু $\angle B_2A_2A_1 \backsimeq \angle A_3A_2B_2$, A_3'. A_2, A_1' একই বৃত্তে অবস্থিত। $A_1'B_1B_4'$ একটি বৃত্তে অবস্থিত ও $A_3'B_3B_4'$ অপর একটি বৃত্তে অবস্থিত হওয়ায় A_4' এই দুইটি বৃত্তের দ্বিতীয় ছেদবিন্দু। পুনরায় A_4, $A_1A_2A_3$ রেখায় অবস্থিত হওয়ায় $A_1'A_2A_3'A_4'$ একই বৃত্তে অবস্থিত।

5.2. প্যাস্কালের উপপাদ্যকে বিকল্পরূপে নীচের ন্যায় লেখা যেতে পারে— একটি বৃত্তস্থ ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দুইটি করে নিয়ে তাদের ছেদক তৃতীয় বাহুকে যে তিনটি বিন্দুতে ছেদ করে, সেই তিনটি সমরেখ অথবা বিপরীতে তিনটি ভেদক যে ত্রিভুজ সৃষ্টি করে এবং অপর ত্রিভুজটির সকলের শীর্ষবিন্দু বৃত্তস্থ। প্যাস্কাল অবশ্য

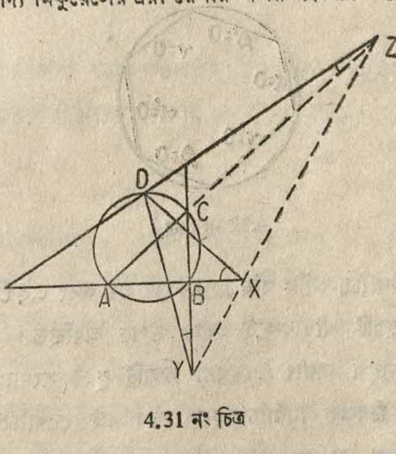
এ উপপাদ্য যে কোন শঙ্কুচ্ছেদের বিন্দু ছয়টির ক্ষেত্রে প্রমাণ করেছিলেন। 4.30 নং চিত্র দ্রষ্টব্য।



4.30 নং চিত্র

মিকুয়েলের উপপাদ্যের দুইটি রূপ দেখান হয়েছে। অপর উপপাদ্য এরূপ লেখা যেতে পারে যে যদি তিনটি ভেদকের একটি সাধারণ বিন্দু থাকে এবং ঐ বিন্দুটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের পরিবৃত্তের উপর অবস্থিত হয় এবং পরন্তু যদি ভেদকগুলি ত্রিভুজের তৃতীয় বাহুগুলিকে সমরেখ তিনটি বিন্দুতে ছেদ করে; তবে ভেদকগুলি ত্রিভুজের বাহুগুলির সহিত বৃত্তের পর্যায়ক্রমে সমান কোণ উৎপন্ন করে। ইহা মিকুয়েলের 'সরলরেখা উপপাদ্য'। 4.31 নং চিত্র দ্রষ্টব্য। $\angle DZC = \angle DXA = \angle DYC$।

সিম্‌সনের উপপাদ্য মিকুয়েলের ত্রয়ী রেখার অপর সংস্করণ। ভেদকগুলি পরিবৃত্তস্থ



4.31 নং চিত্র

বিন্দু হতে গিয়ে বাহুগুলির উপর লম্ব এবং লম্বপাদবিন্দুগুলি সমরেখ। কাজেই তিনটি উপপাদ্যের ভিতরই সাদৃশ্য রয়েছে। এক্ষেত্রে প্যাস্কালের অপর প্রমাণ দেওয়া

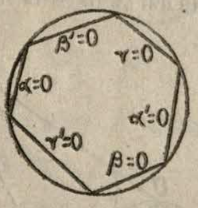
সমীচীন হবে, যেহেতু মিকুয়েলের 'সরলরেখা উপপাদ্য' প্যাস্কালের উপপাদ্যেরই বিশেষ রূপ অর্থাৎ 4.30 নং চিত্রের D, E, F বিন্দু তিনটি একই স্থানে অবস্থিত, কিন্তু DE, EF, DF দিকগুলি ভিন্ন। আবার সিম্‌সনের উপপাদ্যে মিকুয়েলের উপপাদ্যের ভেদকগুলির দিকগুলি বিশেষভাবে নির্দিষ্ট। বিশদ আলোচনার জন্য ফিশার [20], ডজ্‌সন্ [21], গুয়েণ্টার [22], ফোর্ডার [23], কার্তাইভেল্‌স্ [24], নেভিল্ [25] এবং হিউড [26] এর প্রবন্ধগুলির উল্লেখ করা হল।

5.3. যদিও প্যাস্কালের উপপাদ্যের প্রমাণ আগেই দেওয়া হয়েছে, তবুও আর একটি সুন্দর প্রমাণ দেওয়া যেতে পারে। আমরা ষড়ভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি সাধারণ শঙ্কুচ্ছেদে না দিয়ে বৃত্তের উপর নিলাম যেহেতু আমরা ইউক্লিডে আমাদের আবদ্ধ রেখেছি। ধরা যাক বৃত্তের সমীকরণ $S=0$। ষড়ভুজের বাহুগুলির সমীকরণগুলি ধরা যাক

$$\alpha=0,\ \beta'=0,\ \gamma=0,\ \alpha'=0,\ \beta=0,\ \gamma'=0, \qquad \ldots \quad (4.99)$$

চক্রপর্যায়ে লেখা এবং প্রত্যেকেই বৃত্তে অন্তর্লিখিত। স্বভাবতঃই $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$ একঘাত এবং S দ্বিঘাত রাশি। অতএব $\alpha\beta\gamma$ গুণফল ত্রিঘাত। 4.32 নং চিত্র দ্রষ্টব্য। কাজেই আমরা যদি একটি ত্রিঘাত সমীকরণ

$$LS=\alpha\beta\gamma \qquad \cdots \quad (4.100)$$



4.32 নং চিত্র

নিয়ে একটি ত্রিঘাত রেখাচিত্র আঁকি যদি L একঘাত হয় এবং এই রেখাচিত্রের বৈশিষ্ট্য হবে যে ষড়ভুজের ছয়টি শীর্ষবিন্দুই ইহার উপর অবস্থিত। স্পষ্টতই L রেখা $ax+by+c$ এর অনুরূপ অর্থাৎ L রেখায় তিনটি ধ্রুবক সংখ্যা আছে। যদি এই তিনটি ধ্রুবক সংখ্যা ঠিকমত নির্বাচিত হয়, তবে এই রেখাচিত্র ষড়ভুজের ছয়টি শীর্ষবিন্দুগামী হবে এবং বিশেষতঃ

$$LS-\alpha\beta\gamma=0$$

কে $\alpha'\beta'\gamma'=0$ তে পরিণত করা সম্ভব। কাজেই $\alpha\beta\gamma=0$, $\alpha'\beta'\gamma'=0$ এর নয়টি ছেদবিন্দুগুলি $LS=0$ রেখার উপর অবস্থিত অর্থাৎ $S=0$ বৃত্তের উপর বা $L=0$ রেখার উপর অবস্থিত। ষড়ভুজের ছয়টি শীর্ষবিন্দু বৃত্তের উপর অবস্থিত। আর বাকী তিনটি নিশ্চতই $L=0$ এর উপর অবস্থিত হবে। কাজেই $\alpha=0$, $\alpha'=0$ এর ছেদবিন্দু, $\beta=0$, $\beta'=0$ এর ছেদবিন্দু এবং $\gamma=0$, $\gamma'=0$ এর ছেদবিন্দু সমরেখ বা অন্যরূপ তিনটি যুগ্মরেখা যে জোড়া বৃত্তের উপর ছেদ করে নাই তাদের ছেদবিন্দুগুলি সমরেখ।

5.3. এখন 4.27 নং চিত্র বা 4.29 নং চিত্র দ্রষ্টব্য। চারটি বৃত্ত $S_1\equiv A_1'A_2B_2$, $S_2\equiv B_2A_2A_3'$, $S_3\equiv A_3'B_4'B_3$, $S_4\equiv B_4'A_1'A_4$ আর একটি বৃত্ত $B_4'B_1B_2B_3$ কে ছেদ করে। $B_4'B_1B_2B_3$ বৃত্তকে S' দিয়ে অভিহিত করা হল। $B_4'B_1B_2B_3$ বৃত্তকে $S=0$ দিয়ে লিখলে এবং

$$S_cS=S_1S_2S_3S_4 \qquad \dots \quad (4.101)$$

হলে, $S=0$ চতুর্ঘাত সমীকরণ এবং বৃত্তরূপে প্রকাশিত হলে বৃত্তের সমীকরণের বর্গ হবে। কাজেই S_c চতুর্ঘাত রাশি হবে। $S=0$ চারটি ছেদবিন্দু দিয়েছে। $S_c=0$ বাকী চারটি ছেদবিন্দু দিবে। (4.101) এর উভয় দিক তুলনা করলে $S_c=0$ বৃত্তের সমীকরণের বর্গ হবে। অর্থাৎ $S_c=0$ বৃত্ত বাকী চারটি বিন্দু দিয়ে যায়। মিকুয়েলের উপপাদ্য প্যাস্কালের উপপাদ্যের কৌতুহল জাগাবার মত সামান্যীকরণ।

5.4. মিকুয়েলের অপর ধরণের উপপাদ্য লিখেছি। এক্ষেত্রেও আমরা তিনটি রেখা $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$ লিখতে পারি ও $S=0$ বৃত্ত। $L=0$ সরলরেখার সমীকরণ অর্থাৎ

$$LS=\alpha\beta\gamma \qquad \dots \quad (4.102)$$

একটি ষড়ঘাত রাশির সমীকরণ। যদি $\alpha'=0$, $\beta'=0$, $\gamma'=0$ তিনটি ভেদকের সমীকরণ হয় $\alpha\beta\gamma=0$, $\alpha'\beta'\gamma'=0$ রেখাগুলি ছয়টি বিন্দুতে $S=0$ কে ছেদ করে। কাজেই ইহাদের বাকী তিনটি বিন্দু $L=0$ এর উপর অবস্থিত হবে। আর একটি বিষয় লক্ষণীয় যে (4.31 নং চিত্র দ্রষ্টব্য) $\angle DZC$ ও $\angle DYC$ কোণ দুইটি DC বৃত্তচাপের উপর অবস্থিত এবং $\angle DXA$, $\angle DZA$ কোণ দুইটি DA বৃত্তচাপের উপর অবস্থিত। যদি কোন বৃত্তকে বা সরলরেখাকে জটিল রাশির সাহায্যে রূপান্তরকরণ করা হয় বৃত্ত বা সরলরেখা বৃত্তে পরিণত হয়। যদি রূপান্তরিত বৃত্ত দুইটি ছেদ করে

এবং যেহেতু রূপান্তরকরণে কোণগুলি সংরক্ষিত থাকে, $\angle DAC = \angle DYC = \angle DZA = \angle DXA$ ।

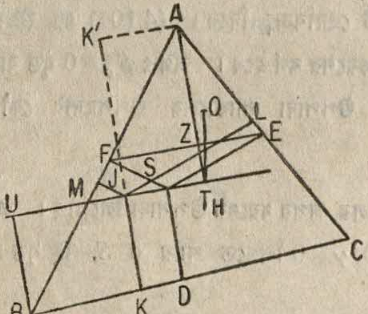
6. আমরা কতকগুলি বিশেষ বিন্দুর আলোচনা করেছি এবং এসবগুলিই ত্রিভুজের সঙ্গে সম্পর্কিত। আরও একটি বিন্দুর বিষয়ে আলোচনা করা অপ্রাসঙ্গিক হবে না।

ABC একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজ এবং DEF, ABC এর পরিকেন্দ্র S অপেক্ষা পাদত্রিভুজ। J বিন্দু ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তের যে কোন একটি নির্দিষ্ট ব্যাস SJ এর উপর অবস্থিত। প্রমাণ করতে হবে যে

(i) একটি বিন্দু O এর অবস্থান পাওয়া যেতে পারে যাতে ODK, OEL, OFM ত্রিভুজগুলি যথাক্রমে ASJ, BSJ, CSJ এর সদৃশ হবে ও

(ii) KLM ত্রিভুজের পরিবৃত্ত O বিন্দু দিয়ে যাবে, J বিন্দু SJ এর উপর যেখানেই অবস্থান করুক না কেন।

O বিন্দুকে 'ইয়ংম্যানের কেন্দ্র' বলা হয়। 4.32 নং চিত্র দ্রষ্টব্য।



4.32 নং চিত্র

ধরা যাক ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র I, J বিন্দুর একটি বিশেষ স্থান। SI রেখার উপর AT লম্ব টানা হল। EF রেখার উপর T বিন্দুর প্রতিফলন বিন্দু O, SI ব্যাসের অপেক্ষা ইয়ংম্যানের বিন্দু। ধরা যাক H বিন্দু ABC ত্রিভুজের লম্ববিন্দু ও X বিন্দু ABC ত্রিভুজের অন্তঃবৃত্তের BC বাহুর সহিত স্পর্শবিন্দু; যদি, N, ABC ত্রিভুজের নববিন্দু হয়, H, X, N বিন্দুগুলি সমরেখ এবং O বিন্দু এই রেখার উপর অবস্থিত।

আবার প্রমাণিত হবে যে $\angle DOX = \angle SAI = \frac{1}{2}\angle SAH = \frac{1}{2}\angle DOP$, ইয়ংম্যানের উপপাদ্য অনুসারে। এতএব OX, নববিন্দুবৃত্তের DP বৃত্তচাপকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। ধরা যাক ইহা R বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়। তবে NR রেখা BC বাহুর উপর লম্ব। সুতরাং

$\angle IOX = \angle IXO = \angle NRO = \angle NOR$ এবং N, I, O সমরেখ। অতএব $NI = NO - IO = \frac{1}{2}R - r$ এবং বৃত্তদুইটি O বিন্দুতে স্পর্শ করে। R, r যথাক্রমে পরিবৃত্তের এবং অন্তঃবৃত্তের ব্যাসার্ধ।

ইয়ংম্যানের উপপাদ্যের সরল প্রমাণ নিম্নরূপ :—

AT, BU রেখা SJ রেখার উপর লম্ব এবং O বিন্দু EF রেখার উপর T এর প্রতিফলন। ধরা যাক K' বিন্দু EF রেখার উপর K বিন্দুর প্রতিফলন। AT রেখা EF রেখাকে Z বিন্দুতে ছেদ করে। যেহেতু OT রেখা EF রেখাদ্বারা লম্বদ্বিখণ্ডিত হয়, $FO = FT$। যেহেতু F বিন্দু AB এর মধ্যবিন্দু এবং AT, BU উভয়েই TU এর উপর লম্ব $FU = FT$। এতএব

$$FO = FT = FU \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (4.103)$$

পুনরায়

$$\angle DFO = \angle DFE + \angle EFO = \angle DFE + \angle EFT$$

অর্থাৎ

$\angle DFO = \angle AEF + \angle TAE$ (যেহেতু $AFTE$ বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ)

$= \angle AZF = \angle DSU$

$= \angle DFU$ (যেহেতু DS রেখা EF এর উপর লম্ব এবং SJ অনুরূপ AT এর উপর লম্ব) ... ... (4·104)

কাজেই O বিন্দু OF রেখার উপর U এর প্রতিফলন।

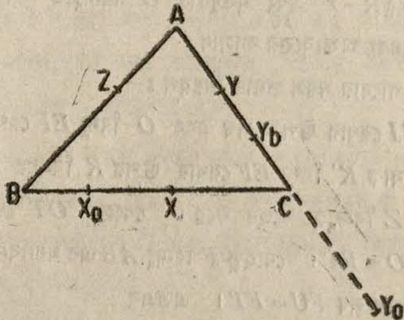
এখন প্রস্তাবিত (i) এবং (ii) এর উপপাদ্যের প্রমাণ করা যাবে।

(i) $\angle OKD = \angle TKA = \angle TJA = \angle AJS$। অনুরূপ $\angle ODK = \angle ASJ$। অতএব OKD, AJS ত্রিভুজ দুইটি সদৃশ। অনুরূপ OLE, BJS ত্রিভুজ দুইটি ও OME, CJS ত্রিভুজ দুইটি সদৃশ।

(ii) পুনরায় $\angle KOL = \angle KML$ অর্থাৎ O বিন্দু KLM ত্রিভুজের পরিবৃত্তের উপর অবস্থিত।

7. অপর একটি বিশেষ বিন্দু জ্যামিতিতে আলোচিত হয়েছে। ত্রিভুজের সঙ্গে যুক্ত নাগেল্ বিন্দুর জ্যামিতিক ধর্মের আলোচনা বিশেষ উৎসাহ জাগিয়েছে।

ধরা যাক N দিয়ে নাগেল্ বিন্দু অভিহিত করা হয়েছে। ABC ত্রিভুজের I, I_a, I_b, I_c যথাক্রমে অন্তঃকেন্দ্র এবং বহিঃকেন্দ্রগুলি। X, X_a, X_b, X_c যথাক্রমে BC এর সহিত স্পর্শবিন্দু, Y, Y_a, Y_b, Y_c যথাক্রমে CA এর সহিত স্পর্শবিন্দু এবং Z, Z_a, Z_b, Z_c যথাক্রমে AB এর সহিত স্পর্শবিন্দু। 4.33 নং চিত্র দ্রষ্টব্য।



4.33 নং চিত্র

যেহেতু $AZ = AY, BX = BZ, CY = CX$

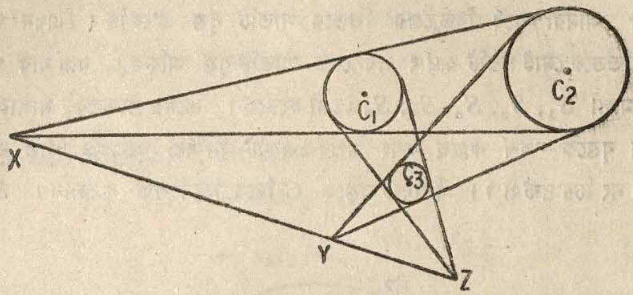
$$AZ.\ BX.\ CY = BZ.\ CX.\ AY \quad \ldots \quad \ldots \quad (4.105)$$

সেভার উপপাদ্য অনুসারে AX, BY, CZ রেখাগুলি সমবিন্দু। অনুরূপভাবে AX_a, BY_b, CZ_c নাগেল্ বিন্দু N এ সমবিন্দু। অনুরূপ AX_a, BX_b, CX_c, এবং BY_b, CY_c, AY_a ও CZ_c, AZ_a, BZ_b ত্রয়ীগুলিও সমবিন্দু। ABC এর অন্তর্লিখিত বৃত্তে X' বিন্দু X বিন্দুর ব্যাস-বিপরীতে অবস্থিত। সেভা রেখা ANX_a, X' বিন্দু দিয়ে যায়। যদি G বিন্দু ABC ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র হয়, $2IG = GN$। নাগেল্ বিন্দুর বিস্তারিত আলোচনার জন্য চেস্টার [27], ডিকিন্সন ও উইনে-উইলসন্ [28] এর প্রবন্ধগুলির উল্লেখ করা হল।

8. আমরা এর পরে মোংগের উপপাদ্য আলোচনা করব। এই উপপাদ্যটি গ্যাসপার্ড্ মোংগে আবিষ্কার করেছিলেন। এই ফরাসী বৈজ্ঞানিক নেপোলিয়নের বিশেষ অন্তরঙ্গ বন্ধু ছিলেন। ধরা যাক তিনটি অসমান ব্যাসার্ধের বৃত্ত কেহ কাহাকেও ছেদ করে না এবং একই সমতলে অবস্থিত। প্রত্যেক জোড়া বৃত্তের এক জোড়া সাধারণ স্পর্শক আছে। মোংগের উপপাদ্যে প্রমাণ করা হয়েছে যে, যে তিনটি বিন্দুতে স্পর্শকজোড়াগুলি মিলিত হয়, সেগুলি সমরেখ। 4.34 নং চিত্র দ্রষ্টব্য।

ধরা যাক $c_i (i=1,2,3)$ বৃত্ত তিনটির সমীকরণ

$$(x-h_i)^2+(y-k_i)^2=a_i^2 \quad (i=1,2,3) \qquad \dots (4.106)$$



4.34 নং চিত্র

X বিন্দুতে যদি c_1, c_2 বৃত্তদুইটির স্পর্শকদুইটি মিলিত হয় এবং যদি ইহার স্থানাঙ্ক (x_3, y_3) হয়, যেহেতু c_1, c_2 বৃত্তের কেন্দ্র হতে সাধারণ স্পর্শকের উপর হতে লম্বগুলির অনুপাত স্পর্শকদ্বয়ের মিলনবিন্দুর কেন্দ্রগুলি হতে দূরত্বের সমানুপাতী

$$\frac{x_3-h_1}{a_1}=\frac{x_3-h_2}{a_2} \text{ ও } \frac{y_3-k_1}{a_1}=\frac{y_3-k_2}{a_2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{অর্থাৎ} \quad x_3-\dfrac{a_1h_2-a_2h_1}{a_1-a_2} \text{ ও } y_3=\dfrac{a_1k_2-a_2k_1}{a_1-a_2} \\ \text{অনুরূপ} \quad x_2=\dfrac{a_2h_3-a_3h_2}{a_2-a_3} \text{ ও } y_2=\dfrac{a_2k_3-a_3k_2}{a_2-a_3}, \\ \qquad x_1=\dfrac{a_3h_1-a_1h_3}{a_3-a_1} \text{ ও } y_1=\dfrac{a_3k_1-a_1k_3}{a_3-a_1} \end{array}\right\} \qquad \dots (4.107)$$

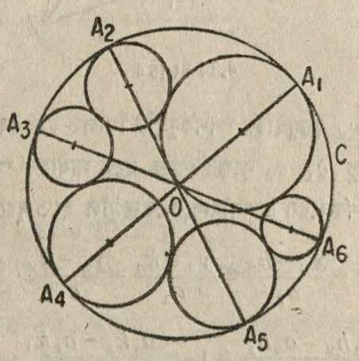
যেখানে $Y(x_2, y_2)$. $Z(x_1, y_1)$, $X(x_3, y_3)$. যদি (x_1, y_1), (x_2, y_2) এবং (x_3, y_3) বিন্দু তিনটিকে সমরেখ হতে হয় তবে

$$\begin{vmatrix} a_1-a_2 & a_1h_2-a_2h_1 & o_1k_2-a_2k_1 \\ a_2-a_3 & a_2h_3-a_3h_2 & a_2k_3-a_3k_2 \\ a_3-a_1 & a_3h_1-a_1h_3 & a_3k_1-a_1k_3 \end{vmatrix}$$

হতে হবে। স্পষ্টতই ইহা সত্য এবং X, Y, Z বিন্দু তিনটি সমরেখ। নেপোলিয়ন যে নিজে গণিতে আগ্রহী ছিলেন তাই নয়, তিনি সব সময়েই সমস্ত অভিযানে বিদ্বজ্জন সঙ্গে নিয়ে যেতেন যাতে তিনি বিজিত দেশের জ্ঞান আহরণ করে নিয়ে

আসতে পারেন। বিস্তৃত আলোচনার জন্য ওয়াকার [29] এর প্রবন্ধ উল্লেখ করা হল।

8. আমরা পূর্বে ত্রিভূজের ভিতরে সাতটি বৃত্ত এঁকেছি। এখন আমরা বৃত্তের ভিতরে মোট ছয়টি অর্থাৎ সবসমেত সাতটি বৃত্ত আঁকব। ধরা যাক পাঁচটি বৃত্তের মালা S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 তৈরী হয়েছে। এদের প্রত্যেকেই মালার মধ্যে আগের বৃত্তকে স্পর্শ করছে এবং অপর একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকেও স্পর্শ করেছে (4.35 নং চিত্র দ্রষ্টব্য)। নির্দিষ্ট বৃত্তকে C দিয়ে নির্দেশিত করলাম। S_6 বৃত্ত



4.35 নং চিত্র

বৃত্তমালার শেষ দুই মাথার বৃত্তগুলিকে এবং C বৃত্তকে স্পর্শ করে। ফলে ছয়টি বৃত্তের একটি বন্ধ আবর্তের সৃষ্টি হয়েছে। S_6 অন্ততঃ একরূপে নেওয়া যেতে পারে যে তিনটি বিপরীত বৃত্তের C বৃত্তের সঙ্গে স্পর্শবিন্দুগুলি যোগকারী রেখা তিনটি C বৃত্তের কেন্দ্রে সমবিন্দু।

প্রমাণের জন্য আমরা সামান্য জটিল রাশির বীজগণিত ব্যবহার করব। ধরা যাক C বৃত্তের ব্যাসার্ধ 1 অর্থাৎ $C : |z| = 1$। ছয়টি স্পর্শবিন্দুর নির্দেশক জটিল রাশিগুলিকে ধরা যাক $A_i : t_i = \exp(j\theta_i)$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ $(j = \sqrt{-1})$। S_i বৃত্তের কেন্দ্রকে $s_i t_i$ দিয়ে নির্দেশিত করা হল এবং বৃত্তের ব্যাসার্ধ r_i। যদি S_i বহির্বিন্দুতে স্পর্শ করে $s_i > 1$ এবং $s_i < 1$ যদি S_i বৃত্ত C দিয়ে পরিবৃত থাকে। নীচে বিভিন্ন রকমের সম্ভাবনা দেওয়া হল।

	r_1, r_2 এর মান		s_1, s_2 এর মান		কেন্দ্রগুলির পারস্পরিক দূরত্ব
	r_1	r_2	s_1	s_2	
(a)	$1-s_1$	$1-s_2$	$0<s_1<1,$	$0<s_2<1$	$r_1+r_2=2-s_1-s_2$
(b)	s_1-1	s_2-1	$s_1>1,$	$s_2>1$	$r_1+r_2=s_1+s_2-2$
(c)	$1-s_1$	s_2-1	$s_1<0$	$s_2<1$	$r_1-r_2=2-s_1-s_2$

... (4.108)

সবকয়টি ক্ষেত্রেই S_1S_2 এর দূরত্ব দাঁড়ায়

$$|s_1t_1-s_2t_2|^2=(s_1t_1-s_2t_2)(s_1t_1^*-s_2t_2^*)$$
$$=\left(s_1t_1-s_2t_2\right)\left(\frac{s_1}{t_1}-\frac{s_2}{t_2}\right) \quad \ldots \quad (4.109)$$

যেহেতু $t_it_i^*=1$। (4·108) হতে পাই যে (4.109) এর মান হবে $(2-s_1-s_2)^2$। (4.109) হতে মানের তুলনা করে পাওয়া যাবে $t_i(i=1,2,3)$ এর প্রতিসম অপেক্ষক

$$\frac{(t_1-t_2)^2}{4t_1t_2}=-\frac{(1-s_1)(1-s_2)}{s_1s_2}+\frac{1}{4}\text{।} \quad \ldots \quad (4.110)$$

(4.110) এর উভয় দিকই প্রতিসম অপেক্ষক। আমরা যদি $\frac{(t_1-t_2)^2}{4t_1t_2}$ কে f_{12} দিয়ে নির্দেশ করি,

$$f_{12}f_{34}f_{56}=f_{23}f_{45}f_{61}$$

অর্থাৎ

$$(t_1-t_2)^2(t_3-t_4)^2(t_5-t_6)^2=(t_2-t_3)^2(t_4-t_5)^2(t_6-t_1)^2 \quad (4.111)$$

যেহেতু (4.35) নং চিত্রে হতে পরিষ্কার দেখা যায় যে

$$\angle A_3A_2A_1+\angle A_5A_4A_3+\angle A_1A_6A_5$$
$$=arg\left\{\frac{(t_1-t_2)(t_3-t_4)(t_5-t_6)}{(t_3-t_2)(t_5-t_4)(t_1-t_6)}\right\}$$
$$=arg\{\pm1\}=n\pi \quad \ldots \quad \ldots \quad (4.112)$$

যেখানে n ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা, উত্তল ষড়ভুজের ক্ষেত্রে $n=2,$

$$(t_1-t_2)(t_3-t_4)(t_5-t_6)=-(t_2-t_3)(t_4-t_5)(t_6-t_1) \quad \ldots \quad (4.113)$$

(4.113) সম্বন্ধটি A_1A_4, A_2A_5, A_3A_6 সমবিন্দু হওয়ার শর্ত। আবার (4.113) কে কথায় প্রকাশ করলে

$$\angle A_1A_2A_3 + \angle A_3A_4A_5 + \angle A_5A_6A_1 = \angle A_2A_3A_4 + \angle A_4A_5A_6 + \angle A_6A_1A_2 = 2\pi \quad \ldots \quad (4.114)$$

উপরের প্রমাণের জন্য জটিল রাশির বীজগণিত ব্যবহার না করে ত্রিকোণমিতির সাহায্যও নেওয়া যেতে পারে। যথা, যদি $\angle A_1OA_2 = \theta$ হয়,

$$A_1A_2{}^2 = 4\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2 - 2\cos\theta$$

$$= 2\left\{1 - \frac{s_1{}^2 + s_2{}^2 - (r_1 + r_2)^2}{2s_1s_2}\right\} \ldots \text{।} \quad \ldots \quad (4.115)$$

(4.115) পেতে (4.109) ব্যবহার করা হয়েছে। অতএব

$$A_1A_2{}^2 = \frac{\{(r_1 + r_2)^2 - (s_1 - s_2)^2\}}{s_1s_2}$$

অর্থাৎ

$$2 - 2\cos\theta = \frac{\{(r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2\}}{s_1s_2} = \frac{4r_1r_2}{s_1s_2} \quad \ldots \quad (4.116)$$

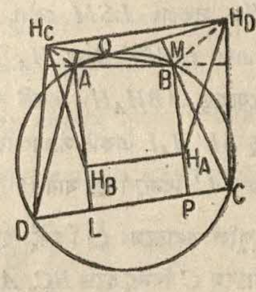
যেহেতু (4.108) এর (*a*) হতে $r_1 - r_2 = s_1 - s_2$। স্বভাবতঃই (4.114) প্রমাণ করা আয়াসসাধ্য। একারণেই জটিলরাশির বীজগণিতের ব্যবহার পছন্দ করা হয়েছে। বিস্তৃত আলোচনার জন্য কাণ্ডি [32] এর প্রবন্ধের উল্লেখ করা হল।

9. এর পরে আমরা অয়েলার রেখার কিছু ব্যাপ্তি এবং নববিন্দুবৃত্তের পরিবর্তে অষ্টবিন্দুবৃত্তের আলোচনার রেখার কিছু ব্যাপ্তি এবং নববিন্দুবৃত্তের পরিবর্তে অষ্টবিন্দুবৃত্তের আলোচনা করব।

ধরা যাক $ABCD$ চতুর্ভুজ R ব্যাসার্ধের বৃত্তস্থ। যেহেতু ত্রিভুজগুলির পরিকেন্দ্রগুলি এবং চতুর্ভুজের পরিকেন্দ্র একই বিন্দু, স্পষ্টতঃই প্রত্যেকেরই অয়েলার রেখাগুলি সমবিন্দু। নীচে প্রমাণ দেওয়া যাবে যে চারটি ত্রিভুজের লম্ববিন্দুগুলি একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের শীর্ষবিন্দুগুলিতে অবস্থিত এবং চতুর্ভুজটি মূল চতুর্ভুজের সহিত সর্বসম। এই দুইটি প্রমাণিত সিদ্ধান্তের ফলে স্থির হবে যে চারটি ত্রিভুজের নববিন্দুগুলি এবং ভরকেন্দ্রগুলিও বৃত্তস্থ চতুর্ভুজে অবস্থিত। এবং এই বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ মূল চতুর্ভুজের সহিত সদৃশ, কিন্তু বাহুগুলি মূল চতুর্ভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্যের অর্ধে ও একতৃতীয়াংশে যথাক্রমে সঙ্কোচিত। অন্তঃকেন্দ্রগুলিও

একটি আয়তক্ষেত্রের শীর্ষবিন্দুগুলিতে অবস্থিত। এরূপ জ্যামিতিক ধর্ম সত্যই প্রাথমিক জ্যামিতির প্রতি কৌতূহল জাগায়।

ধরা যাক H_A, H_B, H_C, H_D যথাক্রমে BCD, CDA, DAB, ABC ত্রিভুজগুলির লম্ববিন্দু। 4.36 নং চিত্র দ্রষ্টব্য। $ABCD$ বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। অতএব



4.36 নং চিত্র

$$AH_B = 2R \cos \angle DAC = 2R \cos \angle DBC = BH_A \quad \ldots \quad (4.117)$$

পুনরায় AH_B রেখা BH_A এর সমান্তরাল। অতএব AH_BH_AB একটি সামান্তরিক। অনুরূপ কারণে DH_CH_DC একটি সামান্তরিক। কাজেই $H_AH_BH_CH_D$ চতুর্ভুজ $ABCD$ চতুর্ভুজের সহিত সর্বসম। AH_A কর্ণ ও BH_B কর্ণ পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। ধরা যাক সমদ্বিখণ্ডনের ছেদবিন্দু S। অনুরূপ কারণে CH_C, DH_D কর্ণ দুইটি S বিন্দুতে পরস্পর সমদ্বিখণ্ডিত করে।

আবার A বিন্দু অপেক্ষা BCD ত্রিভুজের সিম্‌সন্ রেখা AH_A এর মধ্যবিন্দু দিয়ে যায় অর্থাৎ S বিন্দু দিয়ে যায়। এই ধর্ম B, C, D বিন্দুগুলি অপেক্ষা যথাক্রমে CDA, DAB, ABC ত্রিভুজগুলির সিম্‌সন্ রেখাগুলির ক্ষেত্রে প্রযোজ্য।

যেহেতু H_BA রেখা H_CH_D রেখার উপর লম্ব, H_BA রেখা $H_BH_CH_D$ ত্রিভুজের উন্নতি। আবার যেহেতু $H_BH_CH_D$ এবং BCD ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম এবং $AH_B = BH_A$, A বিন্দু $H_BH_CH_D$ ত্রিভুজের লম্ববিন্দু। অনুরূপ ধর্ম B, C, D বিন্দুগুলির ক্ষেত্রেও পাওয়া যাবে। অতএব $ABCD$ চতুর্ভুজ ও $H_AH_BH_CH_D$ চতুর্ভুজ দুইটির একই সিম্‌সন্ বিন্দু। এই পরিচ্ছেদের 1.5 অনুচ্ছেদের শেষাংশ দ্রষ্টব্য। কিন্তু এখানেই শেষ নয়। আরও প্রমাণিত হবে যে A বিন্দু অপেক্ষা

BCD ত্রিভুজের সিমসন রেখা ও H_A বিন্দু অপেক্ষা $H_BH_CH_D$ ত্রিভুজের সিম্‌সন্ রেখা একই রেখা।

ধরা যাক A বিন্দু হতে DC, BC বাহুর উপর লম্বগুলি যথাক্রমে L, M বিন্দুতে ছেদ করে এবং B হতে DC, AD এর উপর লম্বগুলি যথাক্রমে P, Q বিন্দুতে ছেদ করে। ধরা যাক $H_AH_BH_CH_D$ চতুর্ভুজের ক্ষেত্রে অনুরূপ বিন্দুগুলি যথাক্রমে L', M', P', Q'। সুতরাং LSM রেখা A বিন্দু অপেক্ষা BCD ত্রিভুজের সিম্‌সন্ রেখা। এবং $L'SM'$ রেখা H_A বিন্দু অপেক্ষা $H_BH_CH_D$ ত্রিভুজের সিম্‌সন্ রেখা। যেহেতু ABH_AH_B একটি সামান্তরিক ও S', AH_A রেখার মধ্যবিন্দ, এবং যেহেতু $AL'H_AL$ একটি সামান্তরিক, S বিন্দু LL' রেখার মধ্যবিন্দু। অতএব LS রেখা L' বিন্দু দিয়ে যায়।

ধরা যাক U, V বিন্দুগুলি যথাক্রমে C বিন্দু হতে AD, AB বাহুর উপর লম্বপাদবিন্দু এবং X, Y যথাক্রমে C বিন্দু হতে BC, AB এর উপর লম্বপাদবিন্দু। পুনরায় ধরা হল যে, $H_AH_BH_CH_D$ এর এক্ষেত্রে অনুরূপ বিন্দুগুলি যথাক্রমে U', V', X', Y'। তবে আমরা প্রমাণ করব যে আটটি বিন্দু P', L', V, Y', P, L, V', Y একটি বৃত্তে অবস্থিত। এই বৃত্তের কেন্দ্র সিম্‌সন্ বিন্দু S। অনুরূপ ধর্ম Q, M, U', X, Q', M'', U, X' বিন্দুগুলির ক্ষেত্রেও পাওয়া যাবে।

আবার $SV = SL$ এবং $SU = SM'$। আমরা প্রমাণ করব যে $UV' = M'L$ এবং $UV = LM$ অর্থাৎ $UV + UV' = LM + L'M$ বা $LL' = VV'$ এবং $SV' = SL$। আমরা পাই যে $SU = SV' - UV' = SL - M'L = SM'$ অর্থাৎ $UV' = M'L$ যেহেতু $SV' = SL$। অনুরূপে $UV = LM$।

তৃতীয় অষ্টবিন্দুবৃত্ত $ABCD$ চতুর্ভুজের শীর্ষগুলি হতে কর্ণ দুইটির উপর লম্ব এঁকে পাদবিন্দুগুলি দিয়ে পাওয়া যাবে। এই অষ্টবিন্দু বৃত্তের 4.32 নং চিত্রে আঁকা সুবিবেচনার কাজ হবে না। এই চিত্রটিকে অতিরিক্ত জঙ্গলাকীর্ণ না করার জন্য কেবলমাত্র প্রধান প্রধান বিন্দুগুলিই চিত্রে দেওয়া হয়েছে। অন্যগুলি বর্ণনা হতে এঁকে নেওয়া মোটেই কঠিন হবে না।

উপরে যে প্রমাণ দেওয়া হয়েছে সেটি সহজতর ও সামান্যীকৃত প্রমাণ কিছু ভেক্টর বীজগণিতের সাহায্যে দেওয়া যেতে পারে। ধরা যাক $\vec{c}$, $\vec{g}_{A_1A_2A_3}$ যথাক্রমে $A_1A_2A_3$ ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র ও ভরকেন্দ্রের স্থানিক ভেক্টর সূচিত করে। তবে

$(1-\lambda)\vec{c}+\lambda \vec{g}_{A_1A_2A_3}$ বিন্দু $A_1A_2A_3$ ত্রিভুজের অয়েলার রেখার উপরিস্থ কোন বিন্দু যদি λ ধ্রুব সংখ্যা হয়। এই বিন্দুকে সাধারণভাবে λ-বিন্দু বলা হয়। স্পষ্টতঃ λ-এর বিভিন্ন মান নিলে আমরা $A_1A_2A_3$ ত্রিভুজের লম্ববিন্দু বা অন্যান্য অনুরূপ বিন্দু পেতে পারি। কোন ত্রিভুজের পরিকেন্দ্রকে মূলবিন্দু ধরে নিলে, ত্রিভুজের পরিকেন্দ্রের সমীকরণ $|\vec{r}|=|\vec{a}|=a$ রূপে লিখতে পারি। অবশ্যই a ধ্রুবসংখ্যা ধরা হয়েছে। ধরা যাক এই বৃত্তটিতে A_1, A_2, A_3 বিন্দু তিনটি এবং চতুর্থ বিন্দু A_4 দিয়ে যায় ও এই বিন্দু চারটির স্থানিক ভেক্টর $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ দিয়ে যথাক্রমে সূচিত। কাজেই $|\vec{a}_1|=|\vec{a}_2|=|\vec{a}_3|=|\vec{a}_4|=a$। এখন যদি কোন বিন্দু এরূপে সূচিত হয়

$$\vec{s}_i=\frac{\lambda}{3}(\vec{a}_j+\vec{a}_k+\vec{a}_l),\ (i\neq j,k,l),\ \lambda \text{ ধ্রুব}$$

$$=\frac{\lambda}{3}\sum_{m=1}^{4}\vec{a}_m-\frac{\lambda}{3}\vec{a}_i$$

তবে নীচের সম্বন্ধটি সত্য হবে

$$\left|\vec{s}_i-\frac{\lambda}{3}\sum_{m=1}^{4}\vec{a}_m\right|=\frac{|\lambda|}{3}|a_i|=\frac{|\lambda|a}{3}\text{।}$$

যদি $\vec{r}_0$ কে $\vec{r}_0=\frac{\lambda}{3}\sum_{m=1}^{4}\vec{a}_m$ লেখা যায়, $|\vec{s}_i-\vec{r}_0|=\frac{|\lambda|}{3}a$।

উপরের সম্বন্ধটি নির্দেশ করে যে s_1, s_2, s_3, s_4 বিন্দুগুলি এমন একটি বৃত্তের উপর অবস্থিত যার কেন্দ্র $\frac{\lambda}{3}\sum_{m=1}^{4}a_m$ এবং যার ব্যাসার্ধ $\frac{\lambda a}{3}$। পুনরায়

$\overrightarrow{s_is_j}=-\frac{\lambda}{3}\overrightarrow{A_iA_j}$ অর্থাৎ $S_1S_2S_3S_4$ চতুর্ভুজ $A_1A_2A_3A_4$ চতুর্ভুজের সহিত যথাক্রমে পরোক্ষভাবে বা প্রত্যক্ষভাবে সদৃশ যখন λ যথাক্রমে ধনাত্মক বা ঋণাত্মক ধ্রুবসংখ্যা। যদি $\lambda=1$ হয়, $\vec{s}_1$ বিন্দু $A_2A_3A_4$ ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র, $\vec{s}_2$ বিন্দু $A_4A_1A_3$ ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র, $\vec{s}_3$ বিন্দু $A_4A_1A_2$ ত্রিভুজের ও

$\vec{s_4}$ বিন্দু $A_1A_2A_3$ ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র। যদি $\lambda=3$ হয় $\vec{s_i}$ বিন্দুগুলি $A_jA_kA_l$, $i \neq j, k, l$ ত্রিভুজগুলির লম্ববিন্দুগুলি। যদি $\lambda=\frac{3}{2}$ হয়, $\vec{s_i}$ বিন্দুগুলি $A_jA_kA_l$ ত্রিভুজগুলির যথাক্রমে নববিন্দুগুলি। λ-এর বিভিন্ন মানের জন্য পূর্বের উপপাদ্যের সামান্যীকরণ সম্ভব হল। উপরিলিখিত প্রমাণটি পাওয়া গিয়েছে ডঃ অরুণ সান্যাল, আই. আই. টি. খড়্গপুরের নিকট হতে।

এখানে আরেকটি সংযোজন করা যেতে পারে।

ধরা যাক্ A_1, A_2, A_3, A_4 বিন্দুগুলি একই বৃত্তে অবস্থিত, যার সমীকরণ $|\bar{p}|=a$, এবং $\bar{p}_1=\frac{\lambda}{3}\sum_{m=1}^{4} a_m$ কে এই চারটি বিন্দুর λ-বিন্দু বলা হচ্ছে।

এবার এই বৃত্তের উপর পাঁচটি বিন্দু নেওয়া হল A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 এদের থেকে আমরা $5_{c_4}=5$টি চার বিন্দু পাচ্ছি। প্রতিটি চার বিন্দুর একটি করে λ বিন্দু থাকবে, এবং এই পাঁচটি λ বিন্দু একই বৃত্তে অবস্থান করবে।

ধরা যাক্ $A_1A_2A_3A_4$ এর λ-বিন্দু B_5 তাহলে

$$\bar{b}_5=\frac{\lambda}{3}\sum_{m=1}^{4}\vec{a}_m=\frac{\lambda}{3}\sum_{m=1}^{5}\vec{a}_m-\frac{\lambda}{3}\vec{a}_5.$$

যদি $\frac{\lambda}{3}\sum_{m=1}^{5}\vec{a}_m=\vec{r}_i$ লেখা হয়, $\vec{r}_0$ R_0 বিন্দুর স্থানিক ভেক্টর হবে।

$$\rightarrow \vec{p}_0-\vec{b}_5=\frac{\lambda}{3}a_5$$

$$\rightarrow |\bar{b}_5-\bar{r}_0|=\frac{|\lambda|}{3}|\sigma_5|=\frac{|\lambda|a}{3}.$$

তার অর্থ B_5 এবং অনুরূপভাবে বাকি B_i $(i=1, 2, 3, 4)$ $|\vec{p}-\vec{r}_i|=\frac{|\lambda|a}{3}$ বৃত্তের উপর অবস্থিত। R_0 কে $A_1A_2A_3A_4A_5$ পাঁচ-বিন্দুর λ-বিন্দু বলা যেতে পারে। অনুরূপভাবে আমরা বৃত্তস্থ n-বিন্দুর λ-বিন্দু পেতে পারি।

এই পরিচ্ছেদে আমরা প্রধান প্রধান জ্যামিতিক বৈশিষ্ট্যপূর্ণ রেখা ও বিন্দুগুলির র্ণনা ও ধর্ম স্থান দিয়েছি। সিম্সন্ রেখার একাধিকবার উল্লেখ করেছি। এই রেখার বিস্তৃত আলোচনার জন্য গাই [31], কোক্সিটার [32], অ্যাম্ব্রোস্ [33] এর পুস্তক বা প্রবন্ধের উল্লেখ করা হল।

প্রশ্নমালা

1. একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজ ABC এর প্রত্যেকটি শীর্ষবিন্দু দিয়ে বিপরীত বাহুর সমান্তরাল করে রেখা আঁকা হল। এই নতুন ত্রিভুজের লম্ব সমদ্বিখণ্ডকগুলি সমবিন্দু ধর্ম হতে প্রমাণ কর যে কোন ত্রিভুজের শীর্ষ হতে লম্বগুলি সমবিন্দু।

2. যদি অয়েলার রেখা ত্রিভুজের কোন শীর্ষ দিয়ে যায়, প্রমাণ কর যে ত্রিভুজটি সমকোণী বা সমদ্বিবাহু বা সমকোণী সমদ্বিবাহু হবে।

3. যদি অয়েলার রেখা ABC ত্রিভুজের BC বাহুর সমান্তরাল হয়, প্রমাণ কর যে $\angle B$ এবং $\angle C$ কোণ $\tan B \tan C = 3$ সম্বন্ধের সম্ভাব্য সমাধানগুলি হবে।

4. বৃত্তস্থ পঞ্চভুজের ক্ষেত্রে স্থানাঙ্ক জ্যামিতি ও ত্রিকোণমিতির সাহায্যে সামান্যীকৃত অয়েলার রেখার ধর্মগুলি প্রমাণ কর।

5. নববিন্দু বৃত্তের বিকল্প জ্যামিতিক প্রমাণ দাও।

6. জ্যামিতির সাহায্যে বা অন্যরূপে প্রমাণ কর যে স্থূলকোণী ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র ত্রিভুজের বহির্দিকে পড়ে।

7. একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজ ABC এর BC, CA, AB বাহুগুলির উপর যথাক্রমে U, V, W তিনটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে এই বিন্দুগুলিতে লম্বগুলি সমবিন্দু হবে যদি একমাত্র সম্বন্ধ $AW^2 + BU^2 + CV^2 = WB^2 + UC^2 + VA^2$ পূর্ণ হয় (কোক্সিটার [34])।

8. একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের পরিবৃত্তের উপর সাধারণ বিন্দু অপেক্ষা ঐ ত্রিভুজের সিম্‌সন্ রেখার সমীকরণ লিখ। আবার ঐ ত্রিভুজের মর্লে'র সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের বাহুগুলির সমান্তরাল সিম্‌সন্ রেখাগুলির সমীকরণ লিখে দেখাও যে এরূপ সিম্‌সন্ রেখার অস্তিত্ব সম্ভব।

9. 4.23 নং চিত্রে $O_1O_2O_3$ ত্রিভুজের বাহুগুলির বিকল্প মানগুলি লিখ।

10. মেরুরেখীয় সমীকরণ $r = a(1 + 2\cos\theta)$ এর রেখাচিত্র অঙ্কিত করে দেখাও যে চিত্রটি মানুষের হৃদ্‌যন্ত্রের ন্যায়।

11. কোন ত্রিভুজের ভূমি ও বিপরীত শীর্ষকোণ নির্দিষ্ট হলে ঐ ত্রিভুজের নববিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

12. জটিল রাশির বীজগণিতের সাহায্যে প্রমাণ কর যে যদি A', B', C' অন্তঃস্থ বিন্দু P এর ABC ত্রিভুজের যথাক্রমে শীর্ষবিন্দুগুলি A, B, C তে প্রতিফলনবিন্দু হয়, $A'B'C$, $AB'C'$, $A'BC'$, ABC পরিবৃত্তগুলি সমবিন্দু।

13. জটিল রাশির বীজগণিতের সাহায্যে প্রমাণ কর যে কোন নির্দিষ্ট বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দু P, Q, R, S হতে বিপরীত বাহুগুলির উপর যথাক্রম লম্বগুলি সমবিন্দু। যদি PR, QS রেখা দুইটি T বিন্দুতে ছেদ করে তবে একইরূপে প্রমাণ কর যে T বিন্দু চতুর্ভুজের পরিকেন্দ্র হতে সিম্‌সন্ বিন্দুর দূরত্বের মধ্যবিন্দু।

14. যদি A_1, B_1, C_1, D_1 বিন্দুগুলি $ABCD$ চতুষ্কোণের যথাক্রমে BCD, CDA, DAB, ABC ত্রিভুজের লম্বপাদত্রিভুজের পরিকেন্দ্র হয় তবে প্রমাণ কর যে $A_1B_1C_1D_1$ চতুষ্কোণ $ABCD$ চতুষ্কোণের পরোক্ষ সদৃশ।

15. যদি কোন চতুষ্কোণ বৃত্তে অন্তর্লিখিত হয়, তবে ইহার কর্ণবিন্দুগুলির ত্রিভুজ অঙ্কিত করে প্রমাণ কর যে ত্রিভুজের দুইটি বিন্দুতে স্পর্শকগুলি ত্রিভুজের তৃতীয় বিন্দুতে মিলিত হয়।

16. কোন ষড়ভুজের শীর্ষবিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(1, 0)$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), (0, -1) \text{ এবং } \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) \text{ এবং}$$

বৃত্তে অন্তর্লিখিত। এই ষড়ভুজের ক্ষেত্রে প্যাস্কালের উপপাদ্যের সত্যতা প্রমাণ কর।

17. দুইটি বৃত্ত F ও G একটি বৃত্ত C কে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে উভয়েই বহির্দিকে বা অন্তর্দিকে স্পর্শ করে। প্রমাণ কর যে দুইটি বৃত্ত পাওয়া যেতে পারে যারা C, F ও G বৃত্তগুলিকে স্পর্শ করে যদি

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QB}$$

যেখানে P, Q বিন্দু দুইটি যথাক্রমে C বৃত্তের সহিত ঐ দুইটি বৃত্তের স্পর্শবিন্দু দুইটি।

Oriental Mathematics may be interesting curiosity, but Greek Mathematics is the real thing, Greek Mathematics is permanent. Archimedes will be remembered, Aschylus is forgotten, because languages die and mathematical ideas do not.

G. H. Hardy

গ্রন্থপঞ্জী

1. কোক্সিটার, এইচ্. এস্. এম্.—Introduction to Geometry (ওয়াইলি) (1962).
2. লেস্টার, আর্. ই.—[1] 46 (1962) পৃঃ 147.
3. কোক্সিটার, এইচ. এস্. এম্. The Real Projective plane.—(কেম্ব্রিজ ইউনিভার্সিটি প্রেস) (1955)।
4. সিব্‌সন্, আর্—[1] 25 (1941) পৃঃ 150-155।
5. ওয়েস্ট, এম্. এল্—[1] 43 (1959) পৃঃ 203।
6. ওয়ালিস্ ডি. ই.—[1] 66 (1982) পৃ. 224-225।
7. গুলশেখরন্, এফ্. এইচ্. ডি.—[1] 25 (1941) পৃঃ 58-60।
8. লংগেট্-হিগিন্স, এম্. এস্.—[1] 57 (1973) পৃঃ 93-96 ; 58 (1974) পৃঃ 257-263।
9. কলিংস্, এস্. এন্.—[1] 57 (1973) পৃঃ 291-293 ; 58 (1974) পৃঃ 264।
10. ফোর্ডার, এইচ্. জি.—[1] 34 (1950) পৃঃ 62-65।
11. গিবন্‌স্, এন্, এম্.—[1] 23 (1939) পৃঃ 342-348।
12. কাণ্ডি, এইচ্. এম্.—[1] 58 (1974) পৃঃ 265-272।
13. সিস্টার, আর্. এফ্.—[1] 25 (1941) পৃঃ 56-57।
14. প্যারী, সি. এফ্. ও লংগেট-হিগিন্স, এম্. এস্.—[1] 58 (1974) পৃঃ 257-263।
15. উড্, পি. ডব্লিউ.—[1] 25 (1941) পৃঃ 226-272।
16. ম্যালিসন্, এইচ্. ভি.—[1] 42 (1958) পৃঃ 17-20।
17. 1 নং সূচী।
18. হার্স্ট, কে. ই.—[1] 53 (1969) পৃঃ 305-308।
19. রীস্, ডি. এম্ জি. [1] 51 (1967) পৃঃ 143।
20. ফিশার্, জে. সি.—[2] 86 (1979) পৃঃ 260-269।
21. ডজ্‌সন্, সি. ডব্লিউ.—Euclid and his modern rivals (ডোভার) (1973)।

22. গুয়েণ্টার্, ই.—Geometry, An introduction (ওয়াড্স্ওয়ার্থ) (1971)।

23. ফোর্ডার্, এইচ্. জি.—Geometry, An introduction (হার্পার) (1962)।

24. কারতাইডেল্স্, ফ্লোরেণ্ট্, এস্. জে.—[2] 70 (1963) পৃঃ 315-316।

25. নেভিল্, ই. এইচ্. [1] 25 (1941) পৃঃ 245।

26. হিউড্, পি. জে.—[1] 25 (1941) পৃ. 247-248।

27. টেষ্টার, এইচ্. ই.—[1] 46 (1968) পৃঃ 39-52।

28. ডিকিন্শন্, ডি. আর্. ও উইনে-উইল্সন্—[1] 45 (1961) পৃঃ 47।

29. ওয়াকার্, আর্—[1] 60 (1976) পৃঃ 185-88।

30. কাণ্ডি, এইচ্. এম্.—[1] 62 (1978) পৃঃ 200-203।

31. গাই, আর্. কে.—[1] 43 (1959) পৃঃ 123।

32. 1 নং সূচী।

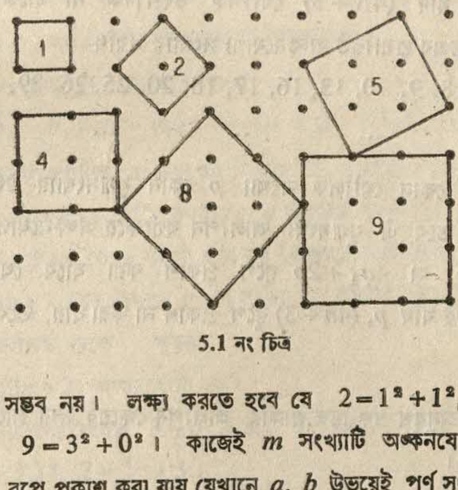
33. এ্যাম্ব্রোস্, ডি. পি.—[1] 50 (1966) পৃঃ 301-303।

34. 1 নং সূচী।

পঞ্চম পরিচ্ছেদ

পাটীগণিতের সংখ্যার সহিত সম্বন্ধযুক্ত জ্যামিতির চিত্রগুচ্ছ

1. আমরা প্রথমে বর্গক্ষেত্রের শীর্ষগুলিতে আলপিন সাজিয়ে অনেকগুলি পাটি ও সারি প্রস্তুত করলাম। তারপর আলোচ্য যে এই আলপিনগুলির যে কোন চারটিকে শীর্ষবিন্দু করে কত রকমের বর্গক্ষেত্র আঁকা সম্ভব ও তাদের ক্ষেত্রফলই বা কত। যে বর্গক্ষেত্রটি ক্ষুদ্রতম হবে তাকে যদি একক ক্ষেত্রফল বলা হয় তবে সেই বর্গক্ষেত্রটিকে 1-অঙ্কনযোগ্য বলব। 5.1 নং চিত্র দ্রষ্টব্য। চিত্র হতে পরিস্ফুট যে 1, 2, 4, 5, 8, 9 বর্গক্ষেত্রগুলি অঙ্কনযোগ্য। কিন্তু 3, 6 বা 7-এককের



5.1 নং চিত্র

বর্গক্ষেত্র আঁকা সম্ভব নয়। লক্ষ্য করতে হবে যে $2=1^2+1^2$, $5=2^2+1^2$, $8=2^2+2^2$, $9=3^2+0^2$। কাজেই m সংখ্যাটি অঙ্কনযোগ্য যদি m-কে $m=a^2+b^2$ রূপে প্রকাশ করা যায় যেখানে a, b উভয়েই পূর্ণ সংখ্যা। অন্যরূপে লিখলে $(\sqrt{m})^2=a^2+b^2$। যেহেতু দুইটি বর্গের যোগফলকে যখন 4 দিয়ে ভাগ করা যায়, ভাগশেষ 0 বা 1 থাকে, $(4n+3)$ অঙ্কনযোগ্য হবে না যদি n কোন ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হয় বা শূন্য মানের হয়। পুনশ্চ কতকগুলি সংখ্যা $(4n+3)$-এর দলের না হয়েও অঙ্কনযোগ্য নয় যথা 6। অতএব যেসব সংখ্যা অঙ্কনযোগ্য তা নির্ণয় করার জন্য সাধারণ নিয়মের প্রয়োজন।

যদি কোন মৌলিক সংখ্যাকে $(4n+3)$ রূপে প্রকাশ না করা যায়, ইহাকে অবশ্যই দুইটি বর্গের যোগফলরূপে প্রকাশ করা যাবে। কারণ যে কোন আলপিনের

কোন স্থানাঙ্ক $(2m+1)$ বা $2m$ রূপে প্রকাশ করা যাবে। এবং সেইহেতু কর্ণের বর্গ

$$(2m+1)^2+(2n)^2 \text{ বা } (2m)^2+(2n)^2 \text{ বা } (2m+1)^2+(2n+1)^2 \quad \ldots \quad (5.1)$$

(5.1)-কে সাজিয়ে লিখলে দাঁড়ায়

$$4(m^2+n^2)+4(m+n)+1 \text{ বা } 4(m+n)+2 \quad \ldots \quad (5.2)$$

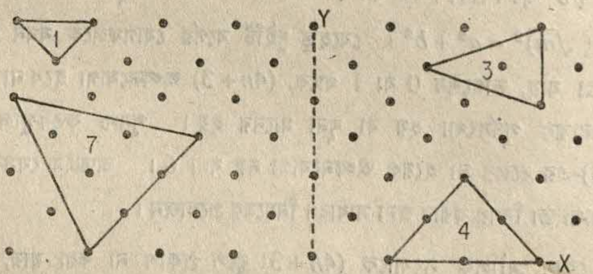
(5.2) হতে স্পষ্ট দেখা যায় যে যদি কোন মৌলিক সংখ্যা $(4N+3)$ রূপে প্রকাশ না করা যায়, তবে ঐ সংখ্যার বর্গক্ষেত্রাকারে সজ্জিত আলপিনগুলিকে শীর্ষ করে বর্গক্ষেত্র আঁকা যাবে। অতএব

2, 5, 13, 17, 29, 37, 41, 53, 61, ... ইত্যাদি সংখ্যা অঙ্কনযোগ্য। কোন যুগ্মসংখ্যার যদি $(4N+3)$ মৌলিক উৎপাদক না থাকে সে সংখ্যাও অঙ্কনযোগ্য। অতএব প্রসারিত অঙ্কনযোগ্য সংখ্যার সরণি

1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 20, 25, 26, 29, 32, 34, 36, 37, 40,... ... ... (5.3)

প্রমাণ :—যদি কোন মৌলিক সংখ্যা p কোন যুগ্মসংখ্যার উৎপাদক 3 বা $(4n+3)$ না হয়, তবে ঐ যুগ্মসংখ্যা আলপিন বর্গক্ষেত্রে অঙ্কনযোগ্য কারণ এরূপ সংখ্যাকে $4q+p$ বা $4q_1+2p$ রূপে প্রকাশ করা যাবে যেখানে q, q_1 পূর্ণসংখ্যা। কাজেই যদি p, $(4n+3)$ রূপে প্রকাশ না করা যায়, তবে যুগ্ম সংখ্যাটি অঙ্কনযোগ্য।

1.1 আমরা অনুরূপ প্রশ্ন ত্রিভূজাকার আলপিন ক্ষেত্রের জন্য আলোচনা করব। 5.2 নং চিত্র দ্রষ্টব্য।



5.2 নং চিত্র

ক্ষুদ্রতম ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলকে একক ক্ষেত্রফল নেওয়া হল। এখন প্রশ্ন হল যে কোন কোন সংখ্যার ত্রিভুজাকার আলপিনের ক্ষেত্র আলপিনকে শীর্ষবিন্দু রেখে সমবাহু ত্রিভুজ আঁকা যাবে। পূর্বের ন্যায় আমরা m সংখ্যাকে অঙ্কনযোগ্য বলব যদি m একক ক্ষেত্রফলের সমবাহু ত্রিভুজ আঁকা সম্ভবপর হয়। 5.2 নং চিত্র হতে পরিষ্কারভাবে বুঝা যায় যে 1, 3, 4, 7 সংখ্যাগুলি অঙ্কনযোগ্য। কিন্তু 2, 5 বা 6 অঙ্কনযোগ্য নয়। কাজেই বিস্তৃত আলোচনার দরকার হয়েছে।

আমরা যে কোন আলপিনের শীর্ষে মূলবিন্দু নিয়ে অক্ষ দুইটি আলপিনের পাটি ও সারির দিকে প্রসারিত করে দিলাম। এখন যে কোন আলপিনশীর্ষের স্থানাঙ্ক $(a, b\sqrt{3})$ রূপে লেখা যেতে পারে যেখানে a, b পূর্ণসংখ্যা বা পূর্ণসংখ্যার অর্ধ। সামান্যীকরণের সুযোগের অপব্যবহার না করে মূল বিন্দুকে সমবাহু ত্রিভুজের কোন শীর্ষে স্থাপন করলে, অপর শীর্ষ দুইটির স্থানাঙ্ক $(a_1, b_1\sqrt{3})$, $(a_2, b_2\sqrt{3})$ লেখা যেতে পারে। অতএব তিনটি বাহুর সমীকরণগুলি

$$\left.\begin{aligned} &a_1y-b_1\sqrt{3}x=0,\ a_2y-b_2\sqrt{3}x=0,\\ &\qquad x(b_1-b_2)\sqrt{3}-y(a_1-a_2)=a_1(b_1-b_2)\sqrt{3}\end{aligned}\right\}। \quad (5.4)$$

কিন্তু ত্রিভুজটি সমবাহু হওয়ায়, m এককের ত্রিভুজ অঙ্কনযোগ্য যদি

$$m=c^2+3d^2 \text{ যেখানে } c, d \text{ উভয়েই পূর্ণসংখ্যা} \quad \ldots \quad (5.5)$$

যেহেতু যে কোন সংখ্যা হয় জোড় সংখ্যা হবে নয় বিজোড় সংখ্যা হবে, তাদের বর্গফল $4p^2$ বা $4p^2+4p+1$ হবে যেখানে p পূর্ণ সংখ্যা। কাজেই তাদের 3 দিয়ে ভাগ করলে 0 বা 1 অবশিষ্ট থাকে। সুতরাং

$$(3p+2) \text{ অঙ্কনযোগ্য নয়।} \quad \ldots \quad \ldots \quad (5.6)$$

3 নিশ্চিতই অঙ্কনযোগ্য যেহেতু $3=0^2+3.1^2$। অনুরূপ 4, 7-ও অঙ্কনযোগ্য যেহেতু $4=1^2+3.1^2$, $7=2^2+3.1^2$।

অতএব p যদি কোন মৌলিক সংখ্যা হয় এবং $(3n+1)$ রূপে প্রকাশ করা যায়, আমরা পূর্ণ সংখ্যা দুইটি a, b পেতে পারি যা p দিয়ে বিভাজ্য।

কারণ, $a^2+3b^2=4m^2+3.4n^2$ বা $4m^2+4m+1+3.4n^2$

বা $4m^2+4m+1+3(4n^2+4n+1)$

বা $4m^2+3(4n^2+4n+1)$ ... ... (5.7)

যদি p একটি মৌলিক সংখ্যা হয় (5.7) এর তৃতীয়টি সম্ভবপর নয় যেহেতু এটি জোড় সংখ্যা। p মৌলিক সংখ্যাটি $(4s+1)$ বা $(4s+3)$ রূপে প্রকাশ করা যাবে।

p কে যদি $(4s+1)$ এবং একই সঙ্গে $(3n+1)$ এর রূপ নিতে হয়, $(4s+1)$ কে 3 দিয়ে ভাগ করলে 1 ভাগশেষ থাকবে। কাজেই (5.7) এর দ্বিতীয় বিকল্প

$$(4m^2+4m+1)+3.4n^2=3(4n^2+m^2+m)+(m^2+m+1)$$

কে 3 দিয়ে ভাগ করলে যদি 3 দিয়ে বিভাজ্য হয়ে থাকে তবে ভাগশেষ থাকবে 1। অন্যথা যদি $m=(3s+1)$ হয় (m^2+m+1) রাশি 3 দিয়ে বিভাজ্য অর্থাৎ $(4m^2+4m+1)+3.4n^2$ রাশিটি 3 দিয়ে বিভাজ্য। যদি $m=(3s+2)$, $(4m^2+4m+1)+3.4n^2$ রাশিটি 3 দিয়ে ভাগ করলে ভাগশেষ 1 থাকবে। (5.7) এর প্রথম বিকল্পে p মৌলিক সংখ্যা হবে না। কাজেই যদি $p=(3n+1)$ একটি মৌলিক সংখ্যা হয় তবে $p=a^2+3b^2$। কাজেই এক্ষেত্রে

$$\text{মৌলিক } p=(3n+1) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (5.8)$$

একটি সম্ভাবনা।

পুনরায় ধরি $a^2+3b^2=4m^2+3(2n+1)^2$

$$=3\{(2n+1)^2+m^2\}+m^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad (5.9)$$

কাজেই, যদি m কে 3 দিয়ে ভাগ করে 1 ভাগশেষ থাকতে হয়, ধরি $m=(3s+1)$, m^2 কে 3 দিয়ে ভাগ দিলে 1 ভাগশেষ থাকবে, আর যদি $m=(3s+2)$ ধরি তাহলেও m^2 কে 3 দিয়ে ভাগ দিলে ভাগশেষ থাকবে 1। অতএব এক্ষেত্রেও $p=(3n+1)$ মৌলিক হলে p কে a^2+3b^2 রূপে প্রকাশ করা সম্ভব হবে।

আমাদের আরও লক্ষ্য রাখতে হবে যে

$$mn=(a^2+3b^2)(c^2+3d^2)$$
$$=(ac+3bd)^2+3(ad-bc)^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad (5.10)$$

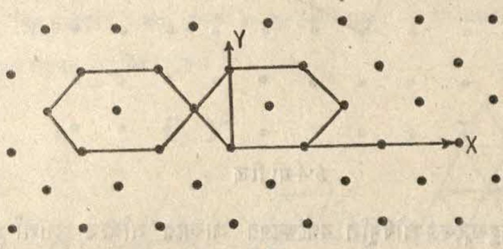
অর্থাৎ এরূপ যুগ্ম সংখ্যাও অঙ্কনযোগ্য। আমরা যদি $(3n+2)$ রূপে যে সব মৌলিক সংখ্যা লেখা যায় না তাদের সারি লিখি তবে পাই

3, 7, 13, 19, 31, 37, 43, 61, ... (5.11)

অর্থাৎ এগুলি সবই অঙ্কনযোগ্য ত্রিভুজাকার আলপিনক্ষেত্রে। কাজেই যে সংখ্যার সমবাহু ত্রিভুজগুলি আলপিন বিন্দুগুলি শীর্ষ করে আঁকা যায় সেগুলি (5.11) এবং 1, 4 সংখ্যাগুলি বা তাদের যুগ্মকরণের ফলে পাই

1, 3, 4, 7, 9, 12, 13, 16, 19, 21, 27, 28, 31, 36, 37, 39,
43, 48, 49, ... (5.12)

1.2 এরপর আমরা সমবাহু ষড়ভুজ ত্রিভুজাকারে সাজান আলপিনগুলিকে শীর্ষ করে আঁকার সম্ভাব্যতা আলোচনা করব। যে কোন সমবাহুর একটি শীর্ষকে মূলবিন্দু ও মূলবিন্দুর সংযুক্ত একটি বাহুকে x-অক্ষ ধরলে ষড়ভুজের শীর্ষগুলির স্থানাঙ্ক $\left(\frac{a}{2}, \frac{b\sqrt{3}}{2}\right)$ রূপে প্রকাশ করা যাবে। a, b জোড় কিংবা বিজোড় পূর্ণ সংখ্যা হতে পারে। 5.3 নং চিত্র দ্রষ্টব্য



5.3 নং চিত্র

যেহেতু ত্রিভুজাকারে সাজান আলপিনগুলিকে শীর্ষ করে আঁকা সমবাহু ষড়ভুজের বাহু সমবাহু ত্রিভুজেরও বাহু, যে সংখ্যা সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রে অঙ্কনযোগ্য সে সংখ্যা সুষম ষড়ভুজের ক্ষেত্রেও অঙ্কনযোগ্য।

1.3 কিন্তু বর্গক্ষেত্রের শীর্ষগুলিতে আলপিন বসিয়ে যে বর্গক্ষেত্রগুলি আঁকা যায় তার সংখ্যা বার করা অন্য দৃষ্টিকোণ থেকে দেখা যেতে পারে। আমরা এক্ষেত্রে অনেক আগে আবিষ্কৃত পিক্‌এর উপপাদ্যের ব্যবহার করতে পারি। 5.1 নং চিত্র দ্রষ্টব্য। যদি আমরা পাটীতে p আলপিন নিরবচ্ছিন্নভাবে বেছে নিয়ে থাকি ও সারিতে q আলপিনও নিরবচ্ছিন্ন নেওয়া হয়ে থাকে তবে আলপিনগুলির ভিতরে রেখা টানলে আঁকা আয়তক্ষেত্রের মধ্যে $(p-1)(q-1)$ বিন্দু পড়বে। অতএব যদি i সংখ্যক বিন্দু আয়তক্ষেত্রের অন্তর্বর্তী হয়ে থাকে, তবে

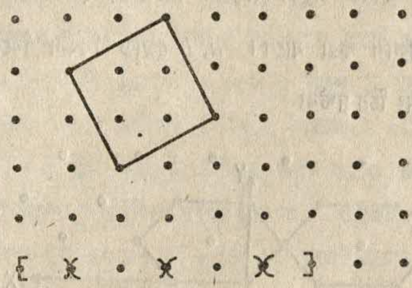
$$i=(p-1)(q-1)=pq-(p+q)+1 \qquad \ldots \quad (5.13)$$

যদি A আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল হয়, e কিনারার আলপিনগুলির সংখ্যা হয়,

$$i=A-\frac{e}{2}+1 \text{ বা } A=i+\frac{e}{2}-1 \ (i\leqslant e)। \qquad \ldots \quad (5.14)$$

(5.13) বা (5.14) সম্বন্ধগুলি বর্গক্ষেত্র বাঁকাভাবে বা সোজাভাবে আঁকলেও সত্য প্রমাণিত হবে। আগের ক্ষেত্রে কেবলমাত্র দুইটি আলপিনের রৈখিক দূরত্ব

বাড়বে। 5·4 নং চিত্র দ্রষ্টব্য। পিক্‌এর উপপাদ্যের সাধারণ বিবরণ নীচে দেওয়া হল।



5·4 নং চিত্র

যদি কোন বহুভুজের শীর্ষগুলি বর্গক্ষেত্রের আকারে সজ্জিত আলপিনের ক্ষেত্রে অবশ্যই কোন না কোন আলপিনের উপর অবস্থিত থাকে এবং এরূপ বহুভুজের অন্তরে i আলপিন বিন্দু থাকে ও b আলপিন বহুভুজের সীমায় অবস্থিত ও A উহার ক্ষেত্রফল হয় তবে

$$A=i+\frac{b}{2}-1 \quad \text{।} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \quad (5.15)$$

যদি বহুভুজটি মানে অবনত হয়ে সরলরেখায় পরিণত হয়

$$A+1=l \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \quad (5.16)$$

যেখানে l সরলরেখার দৈর্ঘ্যের মান। 5·4 নং চিত্র হতে (5·16) পরিষ্কার হবে এবং একে বিকল্পে $l=i+\frac{b}{2}$ রূপে লেখা যেতে পারে। যদি $A=4$ তবে $l=5$, $i=4$, $b=2$।

আমরা আবার ফিরে আসছি আগের প্রশ্নে অর্থাৎ কোন কোন সংখ্যাগুলি বর্গক্ষেত্রাকারে সাজান আলপিনের বিন্দুগুলিকে শীর্ষ করে বর্গক্ষেত্র আঁকা সম্ভব। যেহেতু, (5.14) হবে $A=\frac{e}{2}-1$ $(i\leqslant e)$, যদি $A=1$, $i=0$, $e=4$ একটি সম্ভাব্য সমবায় অর্থাৎ একক সংখ্যা অঙ্কনযোগ্য। অনুরূপ

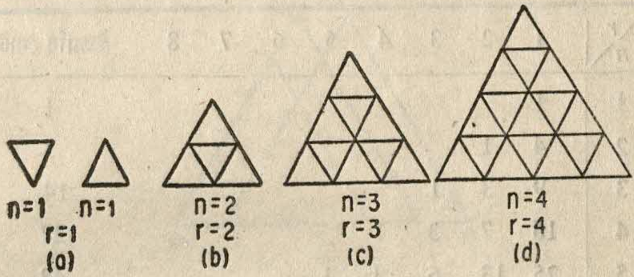
$A=2$, $i=1$, $e=4$ ও সম্ভাব্য সমবায় অর্থাৎ 2 অঙ্কনযোগ্য। যেহেতু, $A=5$, $i=4$, $e=4$ সম্ভাব্য সমবায় 5 অঙ্কনযোগ্য। অনুরূপ $A=8$, $i=5$, $e=8$ ও সম্ভাব্য সমবায় এবং 8 অঙ্কনযোগ্য। অতএব দেখা যাচ্ছে যে অঙ্কনযোগ্য সংখ্যাগুলি ধীরে ধীরে (5.14) সমীকরণের সমাধান সমবায় পেয়ে নির্ণয় করা যেতে

পারে। যেমন $i=28$, $e=4$, $A=29$। বিস্তৃত আলোচনার জন্য বল্ [1], হেগ্ [2] এর প্রবন্ধগুলির উল্লেখ করা হল।

2. এরপর উপরের ধরনের কৌতূহল জাগান প্রশ্ন যেটির আলোচনা হবে সেটি নিম্নরূপ।

একটি সমবাহু ত্রিভুজকে বিভক্ত করে কতগুলি সমবাহু ত্রিভুজ আঁকা যেতে পারে ?

5.5 নং চিত্র দ্রষ্টব্য। ধরা যাক n প্রত্যেক বাহুর ছিন্ন অংশের সংখ্যা ও r সমবাহু সারির সংখ্যা নির্দেশ করে।



5.5 নং চিত্র

5.5 নং চিত্রে পরিষ্কার দেখা যায় যে দুই রকমের ত্রিভুজ আছে—এক রকম উপর দিকে সূচীমুখ ও অপরটি নীচের দিকে সূচীমুখ। ধরা যাক T_n সংখ্যা n-তম ত্রিভুজাঙ্ক অর্থাৎ $T_n = n(n+1)/_2$। কাজেই $T_1=1$, $T_2=3$, $T_3=6$, $T_4=10$, $T_5=15$ ইত্যাদি। এখন নীচের সম্বন্ধগুলি লেখা যেতে পারে :

সারির সংখ্যা	উপরে সূচীমুখ ত্রিভুজের সংখ্যা	নীচে সূচীমুখ ত্রিভুজের সংখ্যা	মোট ত্রিভুজের সংখ্যা
1	T_{n-0}	T_{n-1}	$T_{n-0}+T_{n-1}$
2	T_{n-1}	T_{n-3}	$T_{n-1}+T_{n-3}$
3	T_{n-2}	T_{n-5}	$T_{n-2}+T_{n-5}$
4	T_{n-3}	T_{n-7}	$T_{n-3}+T_{n-7}$
5	T_{n-4}	T_{n-9}	$T_{n-4}+T_{n-9}$
6	T_{n-5}	T_{n-11}	$T_{n-5}+T_{n-11}$
7	T_{n-6}	T_{n-13}	$T_{n-6}+T_{n-13}$
ইত্যাদি	ইত্যাদি	ইত্যাদি	ইত্যাদি

উদাহরণরূপে ধরা যাক $n=4$, $T_4=10$, ক্ষুদ্রতম ত্রিভুজের উপরের দিকে সূচীমুখ 10টি সংখ্যায় এবং নীচের দিকে সূচীমুখ ত্রিভুজের সংখ্যা 6টি। যদি আমরা দুই সারির বড় ত্রিভুজগুলি গণনা করি তবে উপরের দিকে সূচীমুখ ত্রিভুজের সংখ্যা 6 ও নীচের দিকে সূচীমুখ এরূপ ত্রিভুজের সংখ্যা 1। অনুরূপ যদি $n=5$ হয়, $r=1$ এর ক্ষেত্রে ক্ষুদ্রতম ত্রিভুজগুলির সংখ্যা $T_5+T_4=15+10=25$, $r=2$ এর ক্ষেত্রে অপত্রিভুজের সংখ্যা $T_4+T_2=10+3=13$। যদি r পাটী n সরণি আকারে তালিকা প্রস্তুত করি তবে নিম্নরূপ ত্রিভুজের সংখ্যা হবে।

$n \backslash r$	1	2	3	4	5	6	7	8	ইত্যাদি মোট
1	1								1
2	4	1							5
3	9	3	1						14
4	16	7	3	1					27
5	25	13	6	3	1				48
6	36	21	16	6	3	1			78
7	49	31	18	10	6	3	1		118
ইত্যাদি									

2.1. উপরের প্রশ্ন অন্যভাবেও প্রমাণ করতে পারা যায়। অনেকবার আগে বলা হয়েছে যে গণিতের এবং অন্যান্য বিজ্ঞান-শাখার বৈশিষ্ট্য যে ধীরে ধীরে বিকল্প ও উন্নততর প্রমাণ বা উন্নততর প্রণালীর আবিষ্কার করা। আমরা 5.6 নং চিত্রের আকারে সমবাহু ত্রিভুজ থেকে ক্ষুদ্রতর সমবাহু ত্রিভুজ আঁকতে পারি। যদি ছেদের সংখ্যা যথাক্রমে $X_1, X_2 \cdots X_n$ হয়, n জোড়সংখ্যা হলে মোট ত্রিভ্‌জের সংখ্যা

$$\frac{1}{8}n(2n+1)(n+2)$$

ও n বিজোড় সংখ্যায় $$\frac{1}{8}(n+1)(2n^2+3n-1) \qquad \ldots \quad (5.17)$$

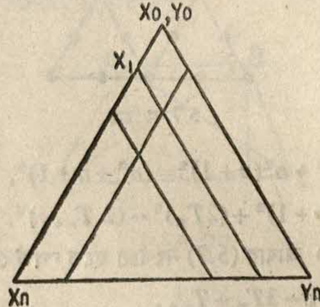
(5.17) অবশ্যই প্রমাণ সাপেক্ষ। ধরি s_k, k দৈর্ঘ্যের বাহুবিশিষ্ট $\triangle_K$ ত্রিভুজের সংখ্যা। তবে

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} s_k \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (5.18)$$

$$s_k = (a_k + b_k),\ a_k = \sum_{r=1}^{n+1-k} r = \tfrac{1}{2}(n+1-k)(n+2-k), \quad \ldots \quad (5.19)$$

$$b_k = \sum_{p=1}^{n+1-2k} p = \tfrac{1}{2}(n+1-2k)(n+2-2k),$$

$$k < (n+1-k) \quad \ldots \quad (5.20)$$



5.6 নং চিত্র

(5.19) রাশিটি পাওয়া গিয়েছে শীর্ষের ত্রিভুজ হতে শুরু করে ক্রমশঃ নীচের দিকে এসেছে যদি ত্রিভুজের সূচীমুখ উপরের দিকে। (5.20) রাশিটি পাওয়া যায় শীর্ষের ত্রিভূজের সূচীমুখ নীচের দিকে রেখে উপর থেকে নীচের দিকে গণনা করে। কাজেই (5.18) হতে

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{2}(n+1-k)(n+2-k) + \sum_{k=1}^{n/2} \tfrac{1}{2}(n+1-2k)(n+2-2k),$$

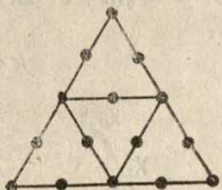
n জোড় সংখ্যা ... (5.21)

$$= \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{2}(n+1-k)(n+2-k) + \sum_{k=1}^{n-1} \tfrac{1}{2}(n+1-2k)(n+2-2k),$$

n বিজোড় সংখ্যা ... (5.21)

যদি $n=5$, (5.22) হতে $S_5 = \frac{1}{8}.6.64 = 48$ এবং $n=6$ হলে $S_6 = \frac{1}{8}.6.13.8 = 78$। §2 এর সরণি হতে $n=5$ হলে, মোট ত্রিভুজের সংখ্যা $25+13+6+3+1=48$ এবং $n=6$ হলে মোট ত্রিভুজের সংখ্যা $36+21+11+6+3+1=78$। দুই প্রণালীতে প্রাপ্ত সংখ্যাগুলির মিল লক্ষ্যণীয়।

2.2. উপরে ত্রিভুজাঙ্কের ব্যবহার একপ্রকারে দেখান হয়েছে। ত্রিভুজাঙ্কের ভিন্ন প্রকার প্রয়োগ দেখান সমীচীন হবে যেখানে জ্যামিতি জড়িত আছে। বর্গাঙ্ক ও ত্রিভুজাঙ্ক নিশ্চয়ই জ্যামিতির সঙ্গে যুক্ত যেহেতু সমবাহু ত্রিভুজ এর ক্ষেত্রফল ঐ বাহুর উপর বর্গক্ষেত্রের অর্ধ। 5.7 নং চিত্র দ্রষ্টব্য। যেহেতু



5.7 নং চিত্র

$$n^2 + (n+1)^2 + n^2(n+1)^2 = (n^2 + n + 1)^2, \quad \ldots \quad (5.23)$$

আমরা পাই $n^2 + (n+1)^2 + (2T_n)^2 - (2\ T_{n+1})^2$,

T_n n-তম ত্রিভুজাঙ্ক। আবার (5.7) নং চিত্র হতে স্পষ্ট দেখতে পাই যে (5.24)

$$T_{2n+1} = 3T_n + T_{n+1} \quad \ldots \quad \ldots \quad (5.25)$$

কারণ শীর্ষের তিনটি ত্রিভুজ ও অন্তর্লিখিত ত্রিভুজের যোগফল সম্পূর্ণ ত্রিভুজটি। বিকল্পে পাই

$$3T_n + 2T_{n-1} = T_{3n} - T_{2n} \quad \ldots \quad \ldots \quad (5.26)$$

কারণ (5.26) এর ডানদিক সর্বনিম্ন n সারির বিন্দুগুলির সংখ্যা। অনুরূপ শেষ n সারির বিন্দুগুলির সংখ্যা নির্ণয় করতে ঐ সারিগুলিকে সর্বাপেক্ষা বড় সূচীমুখ উপরের দিকে ত্রিভুজগুলিকে একত্র করা ও সূচীমুখ নীচের দিকের গুলি একত্র করলে (5.26) বামদিক পাই। (5.26) কে সামন্যীকরণ করলে

$$rT_n + (r-1)\ T_{n-1} = T_{rn} - T_{(r-1)n} \quad \ldots \quad (5.27)$$

(5.24) হতে লিখতে পারি

$$4^2 + 5^2 + 6^2 = 2^2 + 3^2 + 8^2,$$

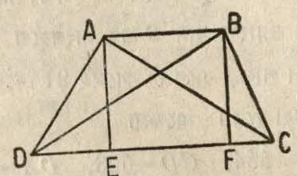
$$5^2 + 6^2 + 7^2 = 1^2 + 3^2 + 10^2,$$

$$6^2 + 7^2 + 8^2 = 1^2 + 2^2 + 12^2,$$

ইত্যাদি

বিস্তৃত আলোচনার জন্য মেন্ড্রানুটোন্ [3], মার্টিন্ [4] ও এপার্সন্ [5] এর প্রবন্ধগুলির উল্লেখ করা হল।

3. এরপর জ্যামিতির সঙ্গে গণিতের যোগ দেখাতে পূর্ণ-সংখ্যক মানের বাহু বেষ্টিত বহুভুজের প্রসঙ্গ আনব। যদিও ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজ খুবই প্রাথমিক চিত্র, তবুও প্রথমে ট্রাপিজিয়ামের প্রসঙ্গ আনব। এমন ট্রাপিজিয়ামগুলি আঁকতে হবে যার বাহুগুলির, কর্ণগুলির, সমান্তরাল বাহুগুলির লম্ব দৈর্ঘ্যের এবং ট্রাপিজিয়ামের ক্ষেত্রফলের মানগুলি পূর্ণসংখ্যক হবে। 5.8 নং চিত্র দ্রষ্টব্য। AE ও BF রেখা দুইটি DC বাহুর উপর লম্ব এবং AB বাহু CD এর সমান্তরাল। AD বাহুকে পূর্ণসংখ্যক হতে হলে AD^2 কে একটি পূর্ণ বর্গসংখ্যা হতে হবে।



5.8 নং চিত্র

অতএব যদি ধরি

$$\left.\begin{aligned} DE = m^2 - n^2,\ AE = BF = 2mn,\ \text{তবে} \\ DA = m^2 + n^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (5.28)$$

পুনরায় যদি ধরি

$$DF = n(m^2 - 1),\ CF = m(n^2 - 1) \quad \ldots \quad \ldots \quad (5.29)$$

দেখা যাবে যে

$$\begin{aligned} BC^2 &= m^2(n^2-1)^2 + 4m^2n^2 = m^2n^4 + 2m^2n^2 + m^2 \\ &= m^2(n^2+1)^2,\ \text{একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা।} \quad \ldots \quad (5.30) \end{aligned}$$

স্পষ্টতঃ

$$\left.\begin{aligned} DC &= CF + DF = (m+n)\,(mn-1), \\ EF &= AB = DF - DE = n(m^2-1) - (m^2 - n^2) \\ &= (m^2+n)\,(n-1) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (5.31)$$

আবার

$$AC^2 = AE^2 + EC^2 = 4m^2n^2 + (m+1)^2\,(m+n)^2\,(n-1)^2 \ldots (5.32)$$

কারণ

$$\begin{aligned} EC = DC - DE &= (m+n)\,(mn-1) - (m^2 - n^2) \\ &= (m+n)\,(mn - m + n - 1) \\ &= (m+n)\,(m+1)\,(n-1)\text{।} \end{aligned}$$

অতএব আমরা সুবিধার জন্য ধরে নিলাম

$$(m+1)^2 (m+n)^2 (n-1)^2 + 4m^2n^2 = (m+1)^2 \{n^2 - (m-1)n + m\}^2 \quad \ldots \quad (5.33)$$

(5.33) হতে n এর জন্য সমাধান করে পাই

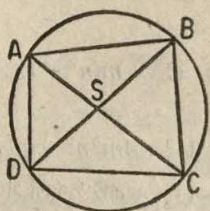
$$n = m(m^2+m+1)/(m-1)(m+1)^2, \; m > 1 \quad \ldots \quad (5.34)$$

n, m কে অবশ্যই পূর্ণ সংখ্যা হতে হবে। উদাহরণস্বরূপ নেওয়া যেতে পারে $m=2$, ও আগাগোড়া 81 দিয়ে গুণ করলে সবগুলি দৈর্ঘ্যই পূর্ণসংখ্যায় পাওয়া যাবে। কারণ, এক্ষেত্রে n এর ভগ্নাংশ মান 9 এর অংশরূপে পাওয়া যায় ও DC, EF ইত্যাদি 81 এর অংশরূপে পাওয়া যাবে। কাজেই 81 দিয়ে গুণ করলে পূর্ণসংখ্যারূপে সবগুলি বাহুকে প্রকাশ করা হবে। এক্ষেত্রে

$AB=250, \quad BC=554, \quad CD=608, \quad DA=520,$

$BD=630, \quad AC=696, \quad AE=504,$ ক্ষেত্রফল $=216216$।

3.1. এরপর বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের কখন বাহুগুলি ও কর্ণগুলি পূর্ণসংখ্যক মানের হবে সেই প্রশ্ন আলোচনা করব। 5.9 নং চিত্র দ্রষ্টব্য।



5.9 নং চিত্র

$ABCD$ বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। অতএব,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos \angle ABC$$

$$= AB^2 + BC^2 - \frac{AB \cdot BC}{AD \cdot DC}(AD^2 + DC^2 - AC^2) \qquad (5.35)$$

যেহেতু $\angle ABC$ কোণ $\angle ADC$ কোণের সম্পূরক। (5.35) হতে

$$AC^2\left(1+\frac{AB \cdot BC}{AD \cdot DC}\right) = AB^2 + BC^2 + \frac{AB \cdot BC}{AD \cdot DC}(AD^2 + DC^2)$$

$$= AB\left(AB + \frac{BC}{DC} \cdot AD\right) + BC\left(BC + \frac{AB}{AD} \cdot DC\right)$$

উভয় দিক $AD \cdot DC$ দিয়ে গুণ করে ও ডানদিকের উৎপাদকগুলি লিখে নিলে পাই

$$AC^2 = (AD \cdot BC + AB \cdot DC)(AD \cdot AB + BC \cdot CD)/(AB \cdot BC + AD \cdot DC) \quad \dots \quad (5.36)$$

অনুরূপে

$$BD^2 = (AD \cdot BC + AB \cdot DC)(AB \cdot BC + AD \cdot DC)/(AD \cdot AB + BC \cdot CD) \quad \dots \quad (5.37)$$

ধরা যাক $AB = x$, $BC = mx$, $CD = nx$, $AD = px$ এবং অবশ্যই x, m, n, p-কে পূর্ণসংখ্যা হতে হবে। (5.36) হতে পাই

$$AC^2 = (mp + n)\left(\frac{mn + p}{m + np}\right) x^2 \quad \dots \quad (5.38)$$

অনুরূপে $$BD^2 = (mp + n)\left(\frac{m + np}{mn + p}\right) x^2 \quad \dots \quad (5.39)$$

(5.37) হতে পাওয়া যায়। এখন যদি $\left(\frac{mn + p}{m + np}\right) = a^2$, তবে $p = \left(\frac{n - a^2}{a^2 n - 1}\right) m$।

AC, BD আনুপাতিক ভগ্নাংশ হতে হলে

$$(mp + n) = \left(\frac{n - a^2}{a^2 n - 1}\right) m^2 + n \text{ বর্গ সংখ্যা।} \quad \dots \quad (5.40)$$

(5.40) হতে যদি $n = q^2$ ধরা যায়,

$$\left(\frac{q^2 - a^2}{a^2 q^2 - 1}\right) m^2 + q^2\text{-কে বর্গ আনুপাতিক ভগ্নাংশ হতে হবে।} \quad \dots \quad (5.41)$$

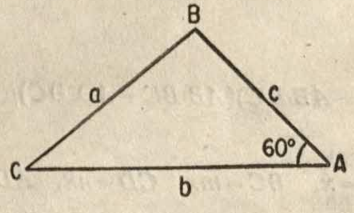
(5.41) কে বর্গরূপে লেখা হল

$$\left(\frac{mr}{a^2 q^2 - 1} + q\right)^2 \text{ অর্থাৎ } m = \frac{2qr(a^2 q^2 - 1)}{\{(q^2 - a^2)(a^2 q^2 - 1) - r^2\}} \quad \dots \quad (5.42)$$

এখন উদাহরণরূপে $a = \frac{3}{2}$, $r = \frac{3}{2}$, $q = 2$। অতএব $m = \frac{192}{47}$, $n = 4$, $p = \frac{42}{47}$। সুতরাং $AC = \frac{585}{141} x$, $BD = \frac{260x}{141}$। x কে 141 ধরে নিলে,

$AB = 141$, $BC = 576$, $CD = 564$, $AD = 126$, $BD = 260$, $AC = 585$।

3.2. এরপর অপেক্ষাকৃত সরল প্রশ্নের সমাধান দেখাব। প্রশ্নটি এই যে কোন ত্রিভুজের যে কোন একটি শীর্ষকোণের মান 60° হলে কোন কোন ত্রিভুজের বাহু পূর্ণসংখ্যক মানের হবে।



5.10 নং চিত্র

অতএব $a^2 = b^2 + c^2 - bc$। a কে পূর্ণসংখ্যার বর্গ হতে হলে ধরি $a = q^2 + qr + r^2$, যেখানে q, r পূর্ণসংখ্যা বা আনুপাতিক ভগ্নাংশ। এবং অনুরূপ

$$b = q^2 + 2qr, \quad c = 2qr + r^2 \qquad \ldots \quad (5{\cdot}42)$$

(5.42) রূপে ধরবার কারণ

$$-bc = (a + c - b)(c - b - a) \qquad \ldots \quad (5.43)$$

এবং যদি $a = pq,\ c = rs,\ (a + c - b) = pr,\ a + b - c = qs, \ldots$ (5.44)

তবে $p = k(q + 2r), \quad s = k(2q + r)$ ... (5.45)

যেখানে k আনুপাতিক ভগ্নাংশ বা পূর্ণ সংখ্যা। (5.45) পাওয়া গিয়েছে a, c-এর মান বসিয়ে ও (5·44) হতে a অপনয়ন করে। অর্থাৎ পাওয়া গিয়েছে প্রথমে $p(2q + r) = s(q + 2r)$ এবং কাজেই

$$p = k(q + 2r), \quad s = k(2q + r)।$$

সুতরাং

$$a = k(q^2 + qr + r^2), \quad b = k(q^2 + 2qr), \quad c = k(2qr + r^2)।$$

$$\ldots \quad (5.46)$$

উদাহরণরূপে নেওয়া যেতে পারে যে

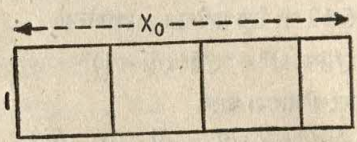
$k = 1, q = 7, r = 4$, ত্রিভুজের বাহুগুলি 105, 93, 72 ;

$k = 1, q = 5, r = 1$, ত্রিভুজের বাহুগুলি 35, 31, 11।

উপরে যে ধরনের প্রশ্নাবলী আলোচিত হল তার বিশদ আলোচনার জন্য লিউইস্‌বি [6], জর্ডান, ওয়াল্‌চ্‌ ও উইস্‌নার [7] ও গিল্ডার্‌ [8] এর প্রবন্ধের

উল্লেখ করা হল। কিন্তু ত্রিভুজের পূর্ণসংখ্যক মানের বাহুর প্রশ্ন নানা রকমের হতে পারে। পরে এ বিষয়ের আলোচনা আরও করা যাবে।

4. আমরা জ্যামিতির সঙ্গে পাটীগণিতের যোগ দেখাবার জন্যই এই অনুচ্ছেদগুলির অবতারণা করেছি। ধরা যাক আমরা জ্যামিতির সঙ্গে ক্রমিক ভগ্নাংশের সম্বন্ধ দেখাতে চাই। 5.11 নং চিত্র দ্রষ্টব্য। একটি আয়তক্ষেত্রের দুইটি বাহুর



5.11 নং চিত্র

মানের অনুপাতকে ধরা যাক $x_i : 1 \ (i=0, 1, 2, \cdots)$। প্রথমে ধরি সর্ববৃহৎ আয়তক্ষেত্র হতে c_0 সংখ্যক একক বর্গক্ষেত্র কেটে নেওয়া যেতে পারে এবং এর অপেক্ষা বেশী বর্গক্ষেত্র পাওয়া যাবে না। এখন যে আয়তক্ষেত্র পড়ে থাকল তার বাহুগুলির অনুপাতের মান $x_1 : 1$ দিয়ে নির্দেশিত হল। যেহেতু $x_1 > 1$, আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের মানের সমীকরণ লিখলে

$$x_1 = \frac{1}{x_0 - c_0} \quad \cdots \quad \cdots \quad (5.48)$$

অনুরূপে $x_2 = \dfrac{1}{x_1 - c_1}, \ x_3 = \dfrac{1}{x_2 - c_2}, \ \cdots, \ x_n = \dfrac{1}{x_{n-1} - c_{n-1}}$ ... (5.48)

যদি এরূপ ঘটে যায় যে কাটতে কাটতে আমরা আবার আগের অনুপাতে ফিরে আসতে পারি তবে

$$x_0 = \frac{1}{x_n - c_n} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (5.49)$$

এরূপ ঘটবে যখন ক্রমিক ভগ্নাংশটি মূলদরাশি নির্দেশ করবে এবং ক্রমিক ভগ্নাংশটি স্বভাবতঃই পৌনঃপুনিক হবে। (5.47) – (5·49) হতে লেখা যেতে পারে

$$x_0 = c_0 + \frac{1}{x_1}, \ x_1 = c_1 + \frac{1}{x_2}, \ \cdots, \ x_{n-1} = c_{n-1} + \frac{1}{x_n},$$

$$x_n = c_n + \frac{1}{x_0}$$

অর্থাৎ,

$$x_0 = c_0 + \frac{1}{c_1+}\frac{1}{c_2+\cdots\cdots+}\frac{1}{x_0} \quad \cdots \quad \cdots \quad (5.50)$$

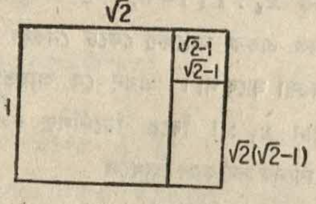
অতএব যদি $a_0 = c_0 + \frac{1}{c_1+}\frac{1}{c_2+\cdots\cdots+}\frac{1}{c_n}$ ধরা হয় $x_0 = a_0 + \frac{8}{x_0}$ অর্থাৎ x_0 একটি মূলদ রাশি প্রমাণিত হল। যেহেতু মূলদরাশি হতে পৌনঃপুনিক ক্রমিক সংখ্যার জ্যামিতিক রূপায়ণ পাওয়া যেতে পারে, একটি কৌতূহল উদ্দীপক উদাহরণ অপ্রাসঙ্গিক হবে না। 5.12 নং চিত্র দ্রষ্টব্য। স্পষ্টতঃই

$$\sqrt{2},\ 1 = 1^2 + (\sqrt{2}-1)^2 = \sqrt{2}(\sqrt{2}-1)^2 \quad \cdots \quad \cdots \quad (5.51)$$

এর ডানদিককে সরল করলে পাওয়া যাবে

$$1+2+1-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}+\sqrt{2}-4 = \sqrt{2}\text{।}$$

(5.51) হতে ক্রমিক সংখ্যার সাথে জ্যামিতির যোগ দেখা যাবে। শেষ আয়তক্ষেত্রের



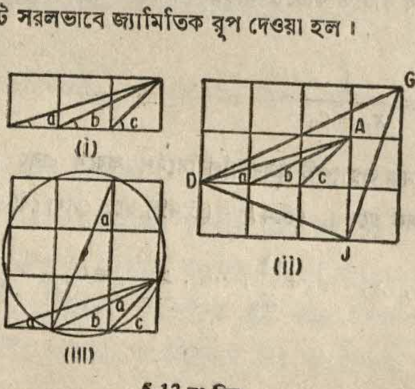
5.12 নং চিত্র

বাহু দুইটির অনুপাত $\sqrt{2}(\sqrt{2}-1) : (\sqrt{2}-1) = \sqrt{2}$।

উপরে ক্রমিক সংখ্যাকে জ্যামিতির রূপ দেওয়া হল। নীচে আর একটি সহজ সরল ত্রিকোণমিতির জ্যামিতিক রূপ দেব। 5.13 নং চিত্রগুলি দ্রষ্টব্য। আমরা জানি যে

$$\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \tan^{-1} 1 \text{।} \quad \cdots \quad \cdots \quad (5.52)$$

(5.52) এর তিনটি সরলভাবে জ্যামিতিক রূপ দেওয়া হল।



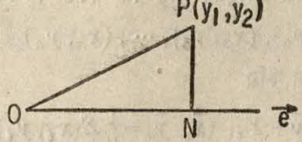
5.13 নং চিত্র

5.13 (i) হতে $c=a+b$ এবং $c=\tan^{-1}1$, $b=\tan^{-1}\frac{1}{2}$, $a=\tan^{-1}\frac{1}{3}$।
আবার 5.13 (ii) হতে $\angle GDJ=a+b=c$ ও 5.13 (iii) হতে $c=a+b$।

4.1 এখন আবার সংখ্যাতত্ত্ব জ্যামিতির সাহায্যে বুঝবার চেষ্টা করব, বিশেষতঃ সংখ্যাতত্ত্বের পাটীগণিতের অংশ। সকলেই স্বীকার করে যে গণিতের সমস্ত দিক বুঝবার পক্ষে জ্যামিতির প্রয়োগই সবচেয়ে উপকারী। সংখ্যাতত্ত্বের বিভিন্ন উপাদান সহজে বুঝবার জন্য জ্যামিতির প্রয়োগ যে কত সহায়তা করে তা দেখান যাবে। আপাতঃ দৃষ্টিতে অনেক বিষয় সম্পূর্ণভাবে বিচ্ছিন্ন মনে হলেও তাদের যোগসৃষ্টি করা গণিতের একটি মনোমুগ্ধকর দিক এবং জ্যামিতি এ বিষয়ে বিশেষ সহায়তা করে। আধুনিককালে সম্যকভাবে বুঝাবার জন্য গণিতে জ্যামিতি কাজে লাগানর সুবিধা বিশেষভাবে অনুভূত হয়েছে এবং জ্যামিতি ভেদাঙ্ক বর্গে, ভেক্টর ও ম্যাট্রিক্সএর সাহায্যে অবনতাঙ্ক নির্ণয়ে কিরূপ সহায়তা করে দেখান হবে। কিছু সংখ্যক উদাহরণ দেওয়া সঙ্গত হবে।

1 নং উদাহরণ : মূল বিন্দুগামী একটি রেখা $\binom{1}{1}$ ভেক্টরের দিকে গিয়াছে। এই রেখার উপর $P(y_1, y_2)$ বিন্দু হতে লম্বপাদবিন্দু নির্ণয় করতে হবে। $e=\binom{1}{1}$ ভেক্টরকে আমরা সাধারণতঃ সমানকোণী ভেক্টর বলে থাকি।

5.14 নং চিত্র দ্রষ্টব্য। $\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$। $\overrightarrow{NP}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}-\alpha\vec{e}$



5.14 নং চিত্র

যদি α একটি নির্ণেয় ধ্রুব সংখ্যা হয়। এরূপ ধ্রুবসংখ্যাকে স্কেলার বলা হয়। যেহেতু $\overrightarrow{NP}$ ভেক্টর $\vec{e}$ ভেক্টরের উপর লম্ব

$$\left\{\begin{pmatrix}y_1\\y_1\end{pmatrix}-\alpha\vec{e}\right\}\cdot\vec{e}=0 \qquad \ldots \qquad \ldots \quad (5.53)$$

অর্থাৎ $y_1+y_2-2\alpha=0$ বা $\alpha=\frac{y_1+y_2}{2}=\left(\bar{y} \text{ ধরা হল}\right)$। কাজেই $\begin{pmatrix}\bar{y}\\\bar{y}\end{pmatrix}$ ভেক্টর $\overrightarrow{ON}$ ভেক্টরকে নির্দেশ করে অর্থাৎ P এর ON এর উপর লম্বপাদবিন্দু N

এবং $\overrightarrow{ON}$ সমানকোণী ভেক্টর। এই ধর্মকে সংখ্যাতত্ত্বের দিক থেকে অর্থবহ করা যেতে পারে। ধরা যাক (y_1, y_2) কোন একটি পরীক্ষায় লব্ধ ফল যদিও এদের আশাগত ফল (α, α)। তবে কিরূপে (α, α) সবচেয়ে উৎকৃষ্ট মানের পাওয়া যাবে? স্বভাবতঃ জ্যামিতির উত্তর হবে যে যখন (y_1, y_2) এবং (α, α) এর দূরত্ব সর্বাপেক্ষা কম তখনই সর্বোৎকৃষ্ট মান পাব। অতএব উপরে দেখেছি যে এরূপ ঘটতে $\alpha = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$ হবে। অর্থাৎ α, y_1 এবং y_2 এর মধ্যক। এই ফলকে সামান্যীকরণ করতে হলে প্রমাণ করতে হবে যে

$$\bar{y} = \frac{1}{n}(y_1 + y_2 + \cdots + y_n) \text{।} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (5.54)$$

সামান্যীকৃত ক্ষেত্রে

$$PN^2 = (y_1 - y)^2 + (y_2 - y)^2 + \cdots + (y_n - y)^2 = ns_y^2, \quad \cdots \quad (5.55)$$

এবং পীথাগোরাসের উপপাদ্যের প্রয়োগ করে PN^2 এর সর্বনিম্নমান হবে

$$ns_y^2 = PN^2 = OP^2 - ON^2 = (y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2)$$
$$- (\bar{y}^2 + \bar{y}^2 + \cdots + \bar{y}^2)$$

অর্থাৎ $s_y^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \bar{y}^2 \quad \cdots \quad \cdots \quad (5.56)$

(5.56) এর রাশিকে পীথাগোরাসের উপপাদ্য অপেক্ষা অনেক জটিল মনে হবে।

2 নং উদাহরণ ঃ আমরা এখন পূর্বাপেক্ষা একটু জটিল এবং ফলিত দিক না চিন্তা করে উদাহরণ নেব। এ উদাহরণ পরস্পর সম্বন্ধাঙ্ক বিষয়ে যুক্ত। ধরা যাক আমরা $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \cdots, (x_n, y_n)$ বিন্দুগুলির পরস্পর সম্বন্ধাঙ্ক নির্ণয় করব। মনে করি

$$x_i = \bar{x} + X_i,\ y_i = \bar{y} + Y_i,\ (\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{n}\Sigma(x_i, y_i) \text{।} \quad \cdots \quad (5.57)$$

তাহলে দ্বিমাত্রিক তলে $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \cdots, (X_n, Y_n)$ কে n সংখ্যক বিন্দুগুলিকে, n-মাত্রিক তলে দুইটি বিন্দু $(X_1, X_2, \cdots, X_n), (Y_1, Y_2, \cdots Y_n)$ ভাবে চিন্তা করতে পারি ও এই দুইটি বিন্দুকে X, Y দিয়ে নির্দেশিত করতে পারি। ঠিক যেরূপ একটি বিন্দুর ক্ষেত্রে সর্বনিম্ন দূরত্ব নির্ণয় করা হয়েছে, ঠিক একই রূপে n-মাত্রিক তলে পরস্পর-সম্বন্ধাঙ্ক r পাওয়া যাবে

$$r = \cos XOY \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (5.58)$$

সম্বন্ধ হতে। অতএব

$$\cos X\hat{O}Y = \frac{X_1Y_1 + X_2Y_2 + \cdots + X_nY_n}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2 + \cdots X_n^2}\ \sqrt{Y_1^2 + \cdots + Y_n^2}} \text{।} \quad (5.59)$$

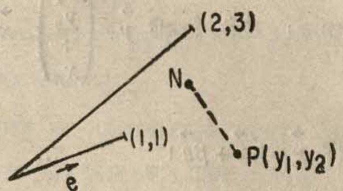
এক্ষেত্রে অনুরূপ গুণনের সাহায্য নেওয়া হয়েছে। (5.59) কে সংক্ষিপ্তভাবে

$$r=\cos X\hat{O}Y=\frac{\Sigma X_i Y_i}{(\Sigma X_i^2\ \Sigma Y_i^2)^{\frac{1}{2}}}$$

এবং এই সূত্রটি জ্যামিতির ক্ষেত্রে স্মরণ রাখা অপেক্ষাকৃত সহজ।

3নং উদাহরণঃ $P(y_1, y_2)$ বিন্দু হতে $\vec{e}=\binom{1}{1}$ এবং $\vec{x}=\binom{2}{3}$ মূল বিন্দুগামী ভেক্টরদ্বয়ের তলের উপর লম্বপাদবিন্দুর স্থানাঙ্কদ্বয় নির্ণয় করতে হবে।

5.15 নং চিত্র দ্রষ্টব্য। N বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\vec{n}=\alpha\vec{x}+\beta\vec{e}=\alpha\binom{2}{3}+\beta\binom{1}{1}$ দিয়ে নির্দেশ করা হল।



5.15নং চিত্র

$\vec{NP}=\vec{y}-\vec{n}$। $\vec{NP}$ ভেক্টর $\vec{n}$ ভেক্টরের প্রতি লম্ব হওয়াতে $(\vec{y}-\vec{n})\cdot\vec{x}=0$ $=(\vec{y}-\vec{e})\cdot\vec{x}$। $\vec{n}$ এর পরিবর্তে $\alpha\vec{x}+\beta\vec{e}$ বসিয়ে

$$(\vec{y}\cdot\vec{x})-\alpha(\vec{x}\cdot\vec{x})-\beta(\vec{e}\cdot\vec{x})=0=(\vec{y},\vec{e})-\alpha(\vec{x},\vec{e})-\beta(\vec{e},\vec{e}) \quad \dots \quad (5.60)$$

$\vec{x}$ এবং $\vec{e}$ এর পরিবর্তে এদের মান বসিয়ে

$$2y_1+3y_2-13\alpha-5\beta=0,\ y_1+y_2-5\alpha-\beta=0 \quad \dots \quad (5.61)$$

অর্থাৎ $\alpha=\frac{y_1}{4}+\frac{y_2}{6},\ \beta=-\frac{y_1}{5}+\frac{y_2}{6}$ এবং α, β এর মান বসিয়ে

$$N=\left(\frac{3y_1}{4}-\frac{y_2}{3},\quad -\frac{y_1}{2}+\frac{y_2}{3}\right)।$$

এই জ্যামিতির প্রণালীতে ফল নির্ণয় সংখ্যাতত্ত্বের দিক হতে অর্থবহ বলে দেখান সম্ভব। এখানে সর্বনিম্ন বর্গগুলির যোগফলের মান নির্ণয়ের পদ্ধতির ধারা প্রয়োগ করব। মনে করা যাক $P_1(2, 3)$, $P_2(3, 12)$, $P_3(4, 9)$ বিন্দু তিনটি হতে

সবচেয়ে কাছের রেখা নির্ণয় করতে হবে। নির্ণেয় রেখাটির সমীকরণ যদি $y = \alpha x + \beta$ হয় তবে উপরের প্রাপ্ত রাশি

$$P_1N_1^2 + P_2N_2^2 + P_3N_3^2 = (3 - 2\alpha - \beta)^2 + (12 - 3\alpha - \beta)^2 + (9 - 4\alpha - \beta)^2 \quad \ldots \quad (5.62)$$

যদি সাধারণভাবে নির্দিষ্ট বিন্দুগুলির সংখ্যা অনির্দিষ্ট রাখা হয় তবে

$$\sum_{1}^{n} (y_i - \alpha x_i - \beta_i)^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad (5.63)$$

যোগফলের সর্বনিম্ন মান নির্ণয় করতে হবে। (5.63) এর বর্গগুলির যোগফলকে দ্বিমাত্রিক তলে মনে না করে n-মাত্রিক তলে তিনটি ভেক্টর দিয়ে একটি সমীকরণ হতে প্রাপ্ত বলে মনে করতে পারি। ভেক্টর তিনটি $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ এবং $\vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ এবং সমীকরণটি $\vec{y} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{e}$। $\quad \ldots \quad \ldots \quad (5.64)$

বা $\quad \vec{y} = X\binom{\alpha}{\beta}, \; X = (\vec{x}, \vec{e})$।

যদি $\quad X' = \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{e} \end{pmatrix}$ হয়, তবে $X'\vec{y} = \begin{pmatrix} \vec{x}\cdot\vec{x} & \vec{x}\cdot\vec{e} \\ \vec{e}\cdot\vec{x} & \vec{e}\cdot\vec{e} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$। $\quad \ldots \quad (5.65)$

(5.63) এর উভয়দিক $(X'X)^{-1}$ দিয়ে গুণ করলে পাই

$$\binom{\alpha}{\beta} = (X'X)^{-1} X'\vec{y} \quad \ldots \quad \ldots \quad (5.66)$$

এখন

$$X'X = n\begin{pmatrix} s_x^2 + \bar{x}^2 & \bar{x} \\ \bar{x} & 1 \end{pmatrix}$$

এবং

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{n\, s_x^2}\begin{pmatrix} 1 & -\bar{x} \\ -\bar{x} & s_x^2 + \bar{x}^2 \end{pmatrix}। \quad \ldots \quad (5.67)$$

অনুরূপে $X'\bar{y}\begin{pmatrix} \Sigma\ x_i y_i) \\ \Sigma\ y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n\, s_{xy} + n\bar{x}\,\bar{y} \\ n\bar{y} \end{pmatrix}$। ... ... (5.68)

অতএব (5.66) হতে

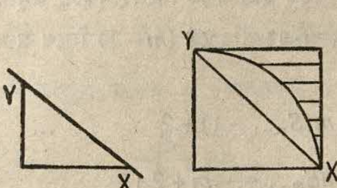
$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{xy}/s_x^2 \\ \bar{y} - \bar{x}\,\dfrac{s_{xy}}{s_x^2} \end{pmatrix} \text{।} \quad \dots \quad \dots \quad (5.69)$$

সরলরেখা $y = \alpha x + \beta$ কে লেখা যেতে পারে

$$y = \frac{s_{xy}}{s_x^2}\,x + \left(\bar{y} - \bar{x}\frac{s_{xy}}{s_x^2}\right) \quad \dots \quad \dots \quad (5.70)$$

জ্যামিতিক প্রণালীতে প্রশ্নের সমাধান বস্তু নিরপেক্ষ গাণিতিক বিশ্লেষণের সাহায্যে সমাধান হতে অনেক সহজে বোধগম্য।

আরও একটি সংখ্যাতত্ত্ব বা সম্ভাব্যতাতত্ত্বের উদাহরণ দিলে প্রণালীর সরসতা সতেজ থাকবে। ধরা যাক চোখ বেঁধে কোন ত্রিভুজ আঁকা হল। এখন প্রশ্ন হল যে সূক্ষ্মকোণী হওয়ার সম্ভাব্যতা কিরূপ। 5.16 নং চিত্র দ্রষ্টব্য। স্পষ্টতঃই $0 < X$, $Y < \pi$ এবং $0 < X + Y < \pi$। তৃতীয় কোণ Z নিশ্চিতই এরূপ হবে যে $X + Y + Z = \pi$। কাজেই $- < \cos X, \cos Y < 1$



(a) (b)

5·16 নং চিত্র

এবং $\cos X + \cos Y > 0$। আমাদের নির্বাচন করতে হবে যাতে $X, Y < \frac{\pi}{2}$

এবং $X + Y > \frac{\pi}{2}$। এক্ষেত্রে $\cos X, \cos Y > 0, \cos^2 X + \cos^2 Y < 1$।

উপরের আলোচনা থেকে জানা যাচ্ছে $0 < X_1$, $Y_1 < 1$ যদি $X_1 = \cos X$, $Y_1 = \cos Y$ ধরা হয়। ABC ত্রিভুজকে নিশ্চিতভাবে সূক্ষ্মকোণী হতে হলে $X_1^2 + Y_1^2 > 1$ এবং $X_1, Y_1 < 1$। 5.16(b) চিত্র হতে দেখা যাবে যে

রেখাঙ্কিত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলই সম্ভাব্যতাঙ্ক দেবে। নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $\left(1-\frac{\pi}{4}\right)=$ ·215। অনুরূপ $0 < X, Y < -1$, সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের সম্ভাব্যতাঙ্ক ·215। মোট সম্ভাব্যতাঙ্ক দাঁড়ায় ·43। গ্রন্থপঞ্জীর ভিতর নর্থ [9], গুড্‌ষ্টাইন্ [10], নীল [I1] এবং ফ্লেচার [12] এর নাম উল্লেখ করা হল।

4.2. এবার পাটীগণিতের সঙ্গে জ্যামিতির যোগ একটু ভিন্ন খাতে দেখাব। এরূপ প্রয়োগের প্রশ্নগুলিও খুবই কৌতূহলপ্রদ। যদি $n \geqslant 6$ হয়, n-শীর্ষক K_n ত্রিভুজের ছবিতে দুইটি মাত্র রংএর সাহায্যে বাহুগুলিকে আঁকলে অন্ততঃ একটি ত্রিভুজের সবগুলি বাহু একরঙা হতে হবে। আরও বিস্তৃতভাবে লিখতে হলে লিখতে হবে যে যদি $n \geqslant (m\,!\,e)+1$ হয়, K_n এর বাহুগুলি m সংখ্যক রঙ দিয়ে রঙীন করলে অন্ততঃ একটি ত্রিভুজের সমস্ত বাহু একরঙা হবে। পরিষ্কার দেখা যায় যে যদি $m=2$ হয়, $n \geqslant 2!.\,(2{\cdot}7)+1=6{\cdot}4$ অর্থাৎ $n \geqslant 6$।

ধরা যাক m-শীর্ষক T_m ক্ষুদ্রতম সংখ্যক ত্রিভুজের তৈরী ছবি যাকে m সংখ্যক রংএ বাহুগুলি রঙীন করলে একটি মাত্র ত্রিভুজের সব বাহু একরঙা হবে। যেহেতু ছবিটিতে m-সংখ্যক শীর্ষবিন্দু আছে

$$T_{m+1} \leqslant (m+1)(T_m-1)+2 \quad \ldots \quad \ldots \quad (5.71)$$

(5.71) এর রাশি একটি সহজ ছবি এ'কে নিলেই বুঝতে অসুবিধা হবে না। T_m-এর পরিবর্তে S_m লিখে এবং m-এর পরিবর্তে $(m-1)$ লিখে আমরা নীচের সমীকরণ টি লিখলাম :

$$S_m = m(S_{m-1}-1)+2 \quad \ldots \quad \ldots \quad (5.72)$$

অর্থাৎ $$S_m - mS_{m-1} = -m+2\text{।}$$

S_m-এর পরিবর্তে $m!\,\lambda_m$ লিখলে, (5.72) হতে

$$\lambda_m-\lambda_{m-1} = -\frac{m+2}{m!} = -\frac{1}{(m-1)!}+\frac{2}{m!}$$

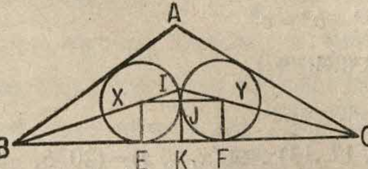
অর্থাৎ, $$\lambda_m-\lambda_o = -\sum_{r=0}^{m+1}\frac{1}{(r-1)!}+\frac{1}{m!}+2\sum_{r=0}^{m}\frac{1}{r!}$$

অতএব, $$S_m = 1+m!\sum_{0}^{m}\frac{1}{r!} \quad \ldots \quad \ldots \quad (5{\cdot}73)$$

সুতরাং $S_1 = 3, S_2 = 6, S_3 = 17, \cdots\cdots$। প্রত্যেকটি শীর্ষবিন্দু হতে $(m-1)(T_m-1)+1$ বাহু বেরিয়েছে এবং তাদের মধ্যে অন্ততঃ T_m সংখ্যক বাহু একরঙা হবে।

4.3 আমরা আর একটি উদাহরণ দেব যেখানে জ্যামিতি, বীজগণিত এবং পাটীগণিত পাশাপাশি কাজে লাগে। যখন দুইটি সমান বৃত্ত পরস্পর স্পর্শ করে এবং ত্রিভুজের দুইটি বাহুকে স্পর্শ করে তাদের ব্যাসার্ধ সদৃশ ত্রিভুজের সাহায্যে প্রত্যক্ষরূপে ও সহজে নির্ণয় করা যায়।

5·17 নং চিত্র দ্রষ্টব্য। $\angle B$ এবং $\angle C$ কোণ দুইটি অন্তর্দ্বিখণ্ডকদ্বয় I বিন্দুতে



5 .17 নং চিত্র

মিলিত হয়েছে। সমান বৃত্ত দুইটির কেন্দ্রগুলি X ও Y। I বিন্দু হতে BC বাহুর উপর লম্বপাদ বিন্দু K and IK রেখাকে J বিন্দুতে ছেদ করে। ধরা থাক $XE = YF = r_a$; $IK = r$, ABC ত্রিভুজের অন্তঃবৃত্তের ব্যাসার্ধ। $IJ = r - r_a$। ধরা যাক $XJ = r_a - x$, $BK = \frac{a}{2} - y$, $YJ = r_a + x$, $CK = \frac{a}{2} + y$। IXJ, IBK এবং IJY, IKC এর জোড়াগুলি বিবেচনা করে পাওয়া যাবে

$$(r_a - x)_{/(r-r_a)} = \left(\frac{a}{2} - y\right)_{/r} \quad \text{এবং} \quad (r_a + x)_{/(r-r_a)} = \left(\frac{a}{2} + y\right)_{/r} \quad \cdots \quad \cdots \quad (5.74)$$

(5.74) হতে x, y অপনয়ন করে

$$\frac{2r_a}{(r-r_a)} = \frac{a}{r} \quad \text{অর্থাৎ} \quad \frac{1}{r_a} = \frac{2}{a} + \frac{1}{r} \quad \cdots \quad \cdots \quad (5.75)$$

$a = BC$।

4.4 এমন একটি ত্রিমাত্রিক তলের প্রশ্ন আলোচনা করব যেখানে পাটীগণিত এবং জ্যামিতি একত্র যুক্ত। অবশ্য সাধাণভাবে ত্রিমাত্রিক তল আমরা আলোচনা বহির্ভূত

রেখেছি। তবে আমরা জ্যামিতি হতে তিনটি চলের বীজগণিতের সমীকরণ গঠন করতে পারি বা তিনটি চলের ডায়োফ্যাণ্টিয় সমীকরণ গঠন করতে পারি। আমরা ঘনবস্তুর বা আয়তফলকের প্রশ্নের আলোচনা করব। আমরা এমন একটি আয়তফলক নির্ণয় করব যার কর্ণগুলি কোন সংখ্যার বর্গ হবে। এর অর্থ যে যদি x, y, z, একটি আয়তফলকের বিভিন্ন ধার হয়, বিশেষভাবে নির্ণেয় আয়তফলকের ক্ষেত্রে

$$x^2+y^2=t^2,\ x^2+z^2=u^2,\ y^2+z^2=v^2$$
$$x^2+y^2+z^2=w^2 \qquad \ldots \quad (5.76)$$

(5.76) সমীকরণের সমাধানরূপে লেখা যায়

$x=a(4b^2-c^2),\ y=b(4a^2-c^2),\ z=4abc$ এবং ... (5.77)

$$a^2+b^2=c^2 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \quad (5.78)$$

(a, b, c পূর্ণসংখ্যাজ্ঞাপক)

উদাহরণরূপে নেওয়া যেতে পারে—

$(a, b, c)=(5, 12, 13)$ দেবে $(x, y, z)=(2035, -828, 3120)$

এবং

$(a, b, c)=(11, 60, 61)$ দেবে (x, y, z)
$=(117469, -194220, 161040)$।

একইরূপে

$(a, b, c)=(143, 24, 145)$ দেবে (x, y, z)
$=(-2677103, 1458504, 1990560)$।

কাজেই (5.77), (5.78) রাশিগুলি (5.76) এর সন্তোষজনক সমাধান নয়। (5.76) এর বিকল্প সমাধান হিসাবে আমরা লিখতে পারি

$x=2mnpq,\ y=mn(p^2-q^2),\ z=pq(m^2-n^2)$,
y^2+z^2 পূর্ণ বর্গসংখ্যা হতে হবে এবং m, n, p, q পূর্ণ সংখ্যা।
... (5.79)

যেহেতু y^2+z^2 কে পূর্ণবর্গসংখ্যা হতে হবে,

$mn(p^2-q^2)=a^2-b^2,\ pq(m^2-n^2)$
$=2ab$ যেখানে a, b পূর্ণসংখ্যা। ... (5.80)

উদাহরণস্বরূপ, $a=5,\ b=3$ ধরে নিলে,

$p^2-q^2=8,\ pq==10,\ m=2,\ n=1$ অর্থাৎ $mn=2, m^2-n^2=3$।

অতএব $x=40,\ y=16,\ z=30$।

(5.80) অপেক্ষা পছন্দসই সূত্র হিসাবে লেখা যেতে পারে

$x = a(b^2 - c^2),\ y = b(a^2 - c^2),\ z = 2abc$ যেখানে

$x^2 + y^2$ একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা হবে এবং $a^2(b^2 - c^2)^2 + b^2(c^2 - a^2)^2 + 4a^2b^2c^2$

বা $a^2b^4 + b^2c^4 + b^2a^4 + a^2c^4 = a^2(b^4 + c^4) + b^2(a^4 + c^4)$ কে পূর্ণবর্গ সংখ্যা হতে হবে। আলোচনা সম্পূর্ণ না করে খোলা রাখা হল যেহেতু এর অনেক দিক আলোচনা করার আছে।

এখানে পূর্বের আলোচনা বিষয়ে কয়েকটি প্রবন্ধের নাম উল্লেখ করার উদ্দেশ্যে ওয়াকার [13], কন্‌স্ট্যাণ্ট্ [14] ও স্পন্ [15] এর প্রবন্ধের উল্লেখ করা হল

4.5 ত্রিভুজের পূর্ণসংখ্যার বাহুর প্রশ্ন চিরনবীন এবং সবসময়ই আলোচনা করা চলতে পারে। আমরা স্মরণে রাখতে পারি যে পীথাগোরীয় ত্রিভুজের একই পরিসীমা থাকলে এবং সমকোণী হলেও পূর্ণসংখ্যকমানের বাহুযুক্ত হতে পারে। উদাহরণ স্বরূপ ধরা যেতে পারে যে 24, 45, 41 ; 20, 48, 52 ; 30, 40, 50 বাহুগুলি পীথাগোরীয় ত্রিভুজ সৃষ্টি করতে পারে। প্রত্যেকটি ত্রিভুজেরই পরিসীমা 120। পীথাগোরীয় ত্রিভুজ না হয়েও একই পরিসীমা বিশিষ্ট ও পূর্ণসংখ্যক মানের ত্রিভুজের বাহুবিশিষ্টতার ধর্ম থাকতে পারে। যথা, 40, 40, 40 বা 36, 38, 46। এখন প্রশ্ন হতে পারে যে কতগুলি অসম এবং পীথাগোরীয় না হয়েও একই পরিসীমা বিশিষ্ট হতে পারে এবং বাহুগুলি পূর্ণসংখ্যক মানের। উত্তর দিতে গিয়ে কতকগুলি অদ্ভুত ফলাফল পাওয়া যায়। উদাহরণরূপে দেওয়া যায় যে 119 সংখ্যার পরিসীমা অসম 300টি ত্রিভুজ পাওয়া যায়। আমরা প্রমাণ দেব যে তিনটি উপপাদ্য আছে যার সাহায্যে অসম একই পরিসীমা বিশিষ্ট ত্রিভুজের সংখ্যা নির্ণয় করবার জন্য।

ধরা যাক $T(N)$ পূর্ণসংখ্যক মানের বাহু বিশিষ্ট N পরিসীমার ত্রিভুজের সংখ্যা। $T(N)$ নীচের তিনটি উপপাদ্য সাহায্যে প্রমাণ করা যায়।

1নং উপপাদ্য ঃ $T(4) = 0$; $T(6) = T(8) = 1$, $T(10) = 2$, $T(12) = 3$, $T(14) = 4$। … … … … (5.81)

2নং উপপাদ্য ঃ যদি $N \geqslant 4$ এবং জোড় সংখ্যা হয় এবং যদি R কে $12K + R = N$ দিয়ে নির্দেশ করা হয় এবং $4 \leqslant R \leqslant 14$, তবে

$$T(N) = \frac{N^2 - R^2}{48} + T(R) \qquad \ldots \quad \ldots \quad (5.82)$$

3নং উপপাদ্য : যদি $N \geqslant 6$ হয়, এবং জোড় সংখ্যা হয়, তবে

$$T(N) = T(N-3) \qquad \ldots \qquad \ldots \quad (5.83)$$

লক্ষ্য করবার বিষয় যে উপরের দ্বিতীয় উপপাদ্যটি দেয় যে $T(N)$ রাশি N-এর একটি দ্বিঘাত ফাংশন এবং ধীরে ধীরে প্রথম শুরুতে প্রথম উপপাদ্যের সাহায্যে আসা যায়। আবার তৃতীয় উপপাদ্য বিজোড় সংখ্যক পরিসীমার অসম ত্রিভুজের সংখ্যা দেয়। সর্বপ্রথমে আমরা উপপাদ্যগুলি প্রমাণের জন্য চেষ্টা করব না। বরং আমরা উপপাদ্যগুলির সিদ্ধান্তের দিকে নজর দেব $\{T(N) : N > 3\}$ শ্রেণী যেভাবে সুরু হয়েছে তা বোধগম্য হতে সময় লাগে, যথা 10, 1, 1, 2,1, 3, 2, 4, 3, 5, 4, 7, 5, 8, 7, 10, 8, 7, 10, 8, 12, 10, 14, 12, 16, 14, 19, 16, 21, 19, 24, 21, ...। যাহোক তৃতীয় উপপাদ্য অনুসারে উপরের শ্রেণীর আংশিক বিজোড় সংখ্যক পদগুলি নিলে শ্রেণীর বিন্যাসে অপেক্ষাকৃত পরিষ্কার ছবি পাওয়া যায়। ছবিটি নিম্নরূপ :

1, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 12, 14, 16, 19,21, 24, 27, 30, 33, 37, 40, 44, 48, 52, 56, 61, 65, 70, 75, ... ।

অনুরূপ প্রথম রাশিটি বাদ দিয়ে জোড় সংখ্যক রাশিপদগুলিও বেশ পরিষ্কার ছবি দেয়। এই কারণেই প্রথম উপপাদ্যে এবং দ্বিতীয় উপপাদ্যের অংশ বিশেষে রাশিপদে জোড় সংখ্যক চল লেখা হয়েছে। এখন নীচে উপপাদ্যগুলির প্রমাণ দিতে চেষ্টা করব।

প্রথম উপপাদ্যের প্রমাণের জন্য কেবলমাত্র সম্ভাব্য ত্রিভুজের সংখ্যাগুলি গুণতে হবে। $N = 12$ এর ক্ষেত্রে ত্রিভুজগুলির বাহুর তালিকা নিম্নরূপ :

$2:5:5$, $3:4:5$ এবং $4:4:4$। কাজেই $T(12) = 3$। অন্যান্য রাশির জন্য প্রমাণ একইরূপ এবং এই কারণে প্রমাণ প্রদর্শনের দরকার মনে করা হল না।

দ্বিতীয় উপপাদ্যের প্রমাণের জন্য ধরা যাক প্রথমে $N \geqslant 4$ এবং জোড় সংখ্যা। K এবং R নির্দেশিত হবে $N = 12K + R$ দিয়ে যেন $4 \leqslant R \leqslant 14$ থাকে। আমরা $[x]$ কে x এর ভিতর বৃহত্তম পূর্ণসংখ্যাকে নির্দেশ করলাম।

ধরা যাক a ত্রিভুজের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য। আমরা a-কে অনায়াসেই বেছে নিতে পারি যে $a \leqslant \left[\frac{N}{3}\right]$। অতএব বাকী দুইটি বাহুর যোগফল $N - a$। এর পরে

ত্রিভুজগুলি গুণবার জন্য একটি বাহুকে a নিয়ে এবং অপর দুটি বাহু প্রায় সমান সমান দৈর্ঘ্যের নিয়ে শুরু করব। এইরূপ ত্রিভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্যের মান নিম্নরূপ ঃ

$$a : \left[\frac{N-a}{2}\right] : N-a-\left[\frac{N-a}{2}\right] \quad \ldots \quad \ldots \quad (5{\cdot}84)$$

দ্বিতীয় ত্রিভুজকে পেতে হলে নিম্নরূপ বাহু নেব

$$a : \left[\frac{N-a}{2}\right]-1 : N-a-\left[\frac{N-a}{2}\right]+1 \ \ldots \quad \ldots \quad (5{\cdot}85)$$

আমরা এইরূপে দ্বিতীয় বাহু 1 ক্ষুদ্রতর করতে থাকব এবং তৃতীয় বাহুকে 1 দীর্ঘতর করতে থাকব যতক্ষণ না দ্বিতীয় বাহু a অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর না হয়। কাজেই আমাদের নীচের তালিকা গুণতে হবে :

$$\begin{aligned}
&a : \left[\frac{N-a}{2}\right] : N-a-\left[\frac{N-a}{2}\right],\\
&a : \left[\frac{N-a}{2}\right]-1 : N-a-\left[\frac{N-a}{2}\right]+1,\\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad (5{\cdot}86)\\
&a : \left[\frac{N-a}{2}\right]-j : N-a-\left[\frac{N-a}{2}\right]+j,\\
&a : \left[\frac{N-a}{2}\right]-\left[\frac{a}{2}\right]+1 : N-a-\left[\frac{N-a}{2}\right]+\left[\frac{a}{2}\right]-1 \text{।}
\end{aligned}$$

(5·86) এ ত্রিভুজ বাহুত্রয়ের সংখ্যা তালিকা $\left[\frac{a}{2}\right]$ পরিসীমা তাদের সকলেরই অবশ্য N। যেহেতু প্রত্যেকটি ত্রিভুজের পরিসীমা N এবং একটি বাহুর দৈর্ঘ্যের সর্বোচ্চ মান $\left[\frac{N}{3}\right]$, আমরা লিখতে পারি যে

$$T[N] \leqslant \sum_{a=1}^{[N/3]} \left[\frac{a}{2}\right] \quad \ldots \quad \ldots \quad (5{\cdot}87)$$

যদি $a : b : c$ বাহুগুলিকে এমন মান অনুসারে সাজাই যে $a \leqslant b \leqslant c$, তবে (5·86) তালিকায় যখন $\left[\frac{N-a}{2}\right]-j<a$ তখন দুইটি ত্রিভুজ সমান হবে। যদিও এক্ষেত্রে $\left[\frac{N-a}{2}\right]-a<j$, কিন্তু $j \leqslant \left[\frac{a}{2}\right]-1$। কাজেই কোন j পাওয়া যাবে না

যাতে নিম্নের অসমতা মান্য হয় ঃ

$$\left[\frac{N-a}{2}\right] - a \geqslant \left[\frac{a}{2}\right] - 1. \qquad \ldots \qquad (5{\cdot}88)$$

(5·86) তালিকায় সমান ত্রিভুজের দ্বিত্বের সংখ্যা অর্ধউন্মুক্ত অঞ্চল

$$\left(\left[\frac{N-a}{2}\right] - a,\ \frac{a}{2} - 1\right) \qquad \ldots \qquad \ldots \quad (5{\cdot}89)$$

এর মধ্যে পূর্ণসংখ্যার সমান। এই সংখ্যাটি হবে

$$\left[\frac{a}{2}\right] - 1 - \left[\frac{N-a}{2}\right] + a = a - 1 - \frac{N}{2} + \left[\frac{a}{2}\right] - \left[-\frac{a}{2}\right]$$

$$= 2a - 1 - \frac{N}{2} \qquad \ldots \qquad (5{\cdot}90)$$

যদি N জোড়সংখ্যা হয়,

$\left[\frac{N-a}{2}\right] = \frac{N}{2} + \left[-\frac{a}{2}\right]$ অর্থাৎ অসমতাটি দাঁড়ায়

$\frac{N}{2} + 1 \geqslant \left[\frac{a}{2}\right] - \left[-\frac{a}{2}\right] + a = 2a$ অর্থাৎ $\frac{N+2}{4} \geqslant a$ (5·91)

কাজেই (5·86) তালিকায় সমান ত্রিভুজের সংখ্যার দ্বিত্ব হবে না যদি না

$$\left[\frac{(N+2)}{4}\right] + 1 \leqslant a \leqslant \left[\frac{N}{3}\right] \qquad \ldots \quad (5{\cdot}90)$$

(5·90) এর সীমাগুলি ব্যবহার করে

$$T(N) = \sum_{a=1}^{[N/3]} \left[\frac{a}{2}\right] - \sum_{a=\left[\frac{N+2}{4}\right]+1}^{[N/3]} \left(2a - 1 - \frac{N}{2}\right) \qquad \ldots \quad (5{\cdot}91)$$

এখন কাজ হবে $T(N)$ এর সূত্র (5·91) হতে সরলীকরণ করবার জন্য আমরা $R=4, 6, 8, 10, 12$ এবং 14 এর মানগুলি ভিন্ন ভিন্ন ভাবে আলোচনা করব। প্রথমে পরিষ্কারভাবে বুঝিয়ে দেবার জন্য, $R=10$ এর ক্ষেত্রে সমস্তগুলি ধাপ লিখে দেব এবং অন্যগুলি এইরূপে হবে বলে পাঠকদের হাতে ছেড়ে দেব।

যদি $N=12K+10$ হয়, তবে $\left[\frac{N}{3}\right] = 4K+3$ এবং $\left[\frac{N+2}{4}\right]$

$= 3K+3$ ।

অতএব এক্ষেত্রে

$$T(N) = \sum_{a=1}^{4K+3} \left[\frac{a}{2}\right] - \sum_{a=3K+4}^{4K+3} \left(2a - 1 - \frac{N}{2}\right)$$

$$= 0 + 1 + 1 + 2 + 2 + \ldots + (2K+1) + (2K+1)$$

$$+ \left(1 + \frac{N}{2}\right)K - 2\sum_{a=3K+4}^{4K+3} a$$

$$= (2K+1)(2K+2) + (6K+6)K - K(7K-7)$$

$$= 4K^2 + 6K + 2 + 6K^2 + 6K - 7K^2 - 7K$$

$$= 3K^2 + 5K + 2 \qquad \ldots \quad (5{\cdot}92)$$

পুর্ণবিন্যাস করে পাই—

$$T(N) = \frac{144K^2 + 240K + 100 - 100}{48} + 2$$

$$= \frac{(12K+10)^2 - 10^2}{48} + T(10)$$

$$= \frac{N^2 - R^2}{48} + T(R) \qquad \ldots \quad (5{\cdot}93)$$

অন্য পাঁচটি ক্ষেত্রেও একইরূপে নির্ণয় করা সম্ভব অর্থাৎ দ্বিতীয় উপপাদ্যটি প্রমাণিত হল।

তৃতীয় উপপাদ্যের প্রমাণের জন্য ধরা যাক $\varepsilon(N)$, N পরিসীমার অসম ত্রিভুজের সেট এবং N জোড় সংখ্যা। অনুরূপ $\theta(M)$ অসম ত্রিভুজের সেট যার পরিসীমা M এবং M বিজোড় সংখ্যা। লক্ষ্য করবার বিষয় যে $1 : b : c$ ত্রিভুজ $\varepsilon(N)$ সেট এর মধ্যে আসতে পারে না যেহেতু $1 + b + c$ জোড় সংখ্যা হবে না যদি না b, c এর মধ্যে $c - b \geqslant 1$ সম্বন্ধ থাকে। কিন্তু তা সম্ভব নয় কারণ ত্রিভুজের যে কোন দুইটি বাহুর যোগফল তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর হতে হবে।

এখন যদি $a : b : c$ ত্রিভুজ $\varepsilon(N)$ সেটের অন্তর্বর্তী হয়ে থাকে, তবে $a \geqslant 2$ এবং স্পষ্টতই $a-1 : b-1 : c-1$ ত্রিভুজটি $\theta(N-3)$ সেটের মধ্যে অবস্থিত যদি অবশ্য ত্রিভুজের অসমতা অমান্য না হয়। যেহেতু N একটি জোড় সংখ্যা এবং $a + b$ ও c এর সম্বন্ধ $a + b > c$ দেওয়া আছে, $a + b \geqslant c + 2$ সম্বন্ধও মান্য হবে। অতএব $(a-1) + (b-1) \geqslant c \geqslant c - 1$ এবং এই সম্বন্ধ $a-1 : b-1 : c-1$

ত্রিভুজের অসমতা সম্বন্ধ প্রমাণিত করে। যেহেতু $a-1 : b-1 : c-1$ ত্রিভুজ $\theta(N-3)$ সেটের মধ্যে অবস্থিত, প্রমাণিত হল যে—

$$T(N) \leqslant T(N-3) \quad \ldots \quad \ldots \quad (5{\cdot}94)$$

পুনরায় যদি $a : b : c$ ত্রিভুজ $\theta(M)$ সেটের অন্তর্বর্তী হয়ে থাকে, তবে $a+1 : b+1 : c+1$ স্পষ্টতই $\varepsilon(M+3)$ সেটের মধ্যে অবস্থিত। অতএব M বিজোড় সংখ্যা হলে

$$T(M) \leqslant T(M+3) \quad \ldots \quad (5{\cdot}95)$$

(5·94) এবং (5·95) হতে N জোড় সংখ্যা হলে

$$T(N) \geqslant T(N-3) \text{ এবং } T(N) \leqslant T(N-3)\,;$$

অর্থাৎ, $T(N)=T(N-3)$ এবং তৃতীয় উপপাদ্য প্রমাণিত হল।

1 নং অনুসিদ্ধান্ত : যদি M বিজোড় সংখ্যা হয় এবং R কে নির্দেশ করা হয় $M=12K+R$ দিয়ে যখন $1 \leqslant R \leqslant 11$, তবে

$$T(M)=\frac{M(M+6)-R(R+6)}{48}+T(R)$$

এবং এখান হতে $T(R)=T(R+3)$ যদি R বিজোড় সংখ্যা হয়।

2 নং অনুসিদ্ধান্ত : যদি N জোড়সংখ্যা হয়, তবে

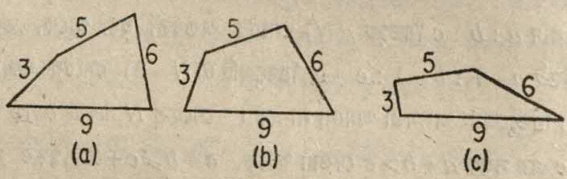
$$T(N+12)=T(N)+\frac{N}{2}+3 \text{ কারণ } (N+12)^2=N^2+48\left(\frac{N}{2}+3\right)।$$

3 নং অনুসিদ্ধান্ত : যদি M বিজোড় সংখ্যা হয়,

$$T(M+12)=T(M)+\frac{M+9}{2} \text{ কারণ}$$

$$(M+12)(M+18)=M(M+6)+48\left(\frac{M+9}{2}\right)$$

মন্তব্য : উপরের আলোচনার স্বাভাবিক বিস্তৃতি হবে অসম চতুর্ভুজ যার পরিসীমা প্রদত্ত হবে। (5·18) নং চিত্র দ্রষ্টব্য। যদি উত্তল চতুর্ভুজ গোণা যায় তবে প্রশ্নটির অনেক সহজে সমাধান হবে। সম্ভবতঃ সর্বোচ্চ ক্ষেত্রফলের মান নির্দিষ্ট



5.18 নং চিত্র

করলে প্রশ্নের সমাধানের অনন্যতা আনবে। এই প্রশ্নের সমাধানের না চেষ্টা করে অন্য বিষয়ের আলোচনার দিকে যাওয়াই সমীচীন হবে। উপরের আলোচনার জন্য গ্রন্থপঞ্জী হিসাবে জর্ডান, ওয়াল্‌চ্‌ ও উইস্‌নার [10] এর প্রবন্ধের উল্লেখ করা হল।

প্রশ্নমালা

1. যদি একটি আলপিনক্ষেত্রে সর্বাপেক্ষা ক্ষুদ্র অঙ্কনযোগ্য ত্রিভুজের শীর্ষকোণ 45° হয়, তবে কোন কোন ক্ষেত্রফল ঐ আলপিনক্ষেত্রে অঙ্কনযোগ্য নির্ণয় কর। দেখাও যে এরূপ ক্ষেত্রফল ক্ষুদ্রতম ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলকে একক ধরে 1, 2, 4, 6, 8, 9, 11, 12, ইত্যাদি দিয়ে নির্দেশিত করা সম্ভব।
2. উপর দিকে শীর্ষ এবং নীচের দিকে শীর্ষ রেখা সমবাহু ত্রিভুজের সংখ্যার সরণি পূর্ণ কর যখন $n=10$ ও $r=10$।
3. পূর্ণসংখ্যক মানের বাহুযুক্ত ট্রাপিজিয়াম নির্ণয় কর যখন কর্ণ, সমান্তরাল বাহুর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য পূর্ণসংখ্যক মানের এবং একটি লম্ব ট্রাপিজিয়মের অন্তঃস্থিত এবং অপরটি বহিঃস্থ।
4. একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বাহুগুলি নির্ণয় কর যদি বাহুগুলির দৈর্ঘ্য, শীর্ষবিন্দুগুলি হতে কর্ণগুলির উপর লম্বের দৈর্ঘ্যগুলি এবং পরিবৃত্তর ব্যাসার্ধগুলি পূর্ণসংখ্যক।
5. $\sqrt{3}$ মূলদরাশির অনুরূপ আয়তক্ষেত্র এঁকে ক্রমিক ভগ্নাশরূপে প্রকাশ করবার জন্য আয়তক্ষেত্রের অংশকে বর্গক্ষেত্রাকার অংশে কেটে দেখাতে হবে যে পূর্ণ আয়তক্ষেত্রের বাহুগুলির দৈর্ঘের অনুপাত $\sqrt{3}:1$।
6. যদি পরস্পর সম্বন্ধাঙ্করেখার সমীকরণ $y=\alpha+\beta x+\gamma x^2$ লেখা যায়, দেখাও যে

$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ পাওয়া যাবে $(X'X)^{-1}X'Y$ যেখানে

$$X=\begin{pmatrix}1&-2&4\\1&-1&1\\1&0&0\\1&1&1\\1&2&2\end{pmatrix} \text{ এবং } Y=\begin{pmatrix}e^{-2}\\e^{-1}\\1\\e\\e_2\end{pmatrix} \text{ অর্থাৎ } \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cdot 899\\ 1\cdot 686\\ \cdot 712\end{pmatrix}$$

7. (5·79) এর সূত্রের সাহায্যে বিকল্প ত্রিভুজ নির্ণয় কর।

8. জ্যামিতিক বিকল্প প্রণালীতে প্রমাণ কর যে $\tan^{-1}(\frac{1}{2}) + \tan^{-1}(\frac{1}{3})$

$= \tan^{-1}1$ ।

As mathematicians withdrew into upper regions of ever greater extremes of abstract thought, it returned back to earth with a corresponding growth of importance for the analysis of concrete fact.

...Whitehead

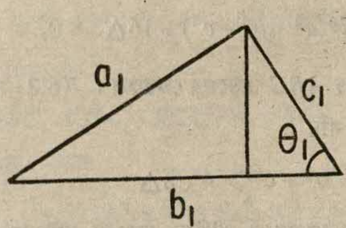
গ্রন্থপঞ্জী

1. বল্, ডি. জি.—[1] 55 (1971) পৃ. 373-379,
   [1] 57 (1973) পৃ. 119-122 ।
2. হেগ্, জি.—[1] 64 (1980) পৃঃ 173-177 ।
3. মেল্ট্রান্টোন্, বি. ডি.—[1] 55 (1971) পৃঃ 438-439 ।
4. মার্টিন, বি. ডব্লিউ—[1] 55 (1971) পৃঃ 440-441 ।
5. এপারসন্, ডি. বি.—[1] 51 (1967) পৃঃ 242-243 ।
6. লিউইস্‌বি, বি, জে—[1] 25 (1941) পৃঃ 256 ।
7. জর্ডান, জে. এইচ., ওয়াল্চ্ ও উইসনার্, আর. জে—[2] 86 (1979) পৃঃ 687-689 ।
8. গিল্ডার্, জে.—[1] 66 (1982) পৃঃ 61-66 ।
9. নর্থ, আর্—[1] 57 (1973) পৃঃ 334-336 ।
10. গুড্স্টাইন, আর. এল্.—[1] 58 (1974) পৃঃ 291-292 ।
11. নীল্, এইচ্.—[1] 66 (1982) পৃঃ 284-294 ।
12. ফ্লেচার্, সি. আর্.—[1] 55 (1971) পৃঃ 421-422 ।
13. ওয়াকার্, আর্. সি.—[1] 60 (1976) পৃঃ 54-57 ।
14. কন্স্ট্যান্ট, ডি.—[1] 46 (1962) পৃঃ 242-243 ।
15. স্পন্, ডব্লিউ. জি—[2] 79 (1972) পৃঃ 57-59 ।
16. 7 নং সূচী ।

ষষ্ঠ পরিচ্ছেদ

প্রাথমিক জ্যামিতির সাহায্যে প্রাথমিক বীজগণিতের কিছু সিদ্ধান্ত বা তাহার প্রতিবর্ত এবং ত্রিকোণমিতির কিছু অসমীকরণ

1. এই পরিচ্ছেদের প্রথমে বীজগণিতের কিছু সহজ সরল সিদ্ধান্ত জ্যামিতির সাহায্যে নির্ণয় করা হবে। প্রশ্নের প্রকৃতি হতেই বুঝা যায় যে আলোচনা অনেক গভীরে যেতে পারে এবং বিষয়বস্তুরও নানা বৈচিত্র্য সম্ভব। গ্রীকগণ জ্যামিতির পাঠ বিপরীত দিক হতে সুরু করেছিলেন। তাঁরা জ্যামিতির সাহায্যে বীজগণিতের সমীকরণের সমাধান করেছিলেন। তাঁরা ত্রিঘাত সমীকরণের সমাধান পর্যন্ত অগ্রসর হতে পেরেছিলেন। কিন্তু পরে স্বতঃসিদ্ধের প্রণালী ও আরও পরে বীজগণিতের প্রণালী জ্যামিতির সিদ্ধান্ত পেতে প্রয়োগ করেছিলেন। এই প্রণালীগুলি আগের পরিচ্ছেদগুলিতে বিস্তৃতভাবে আলোচিত হয়েছে এবং ইউক্লিড্ যেভাবে শুরু করেছিলেন সেইভাবে নানাপ্রকার কৌতূহলোদ্দীপক সিদ্ধান্তে আসা গিয়েছে। 6.1নং চিত্র একটি সরল রেখার উপর অপর আর একটি রেখার অভিক্ষেপ দেখাচ্ছে। এই অভিক্ষেপ থেকে সহজ সরল সিদ্ধান্ত $b^2+c^2 \geqslant 2bc$ পাওয়া যাবে। 6.1 নং চিত্র হতে $a_1{}^2 = b_1{}^2 + c_1{}^2 - 2b_1c_1 \cos\theta_1 \geqslant 0$



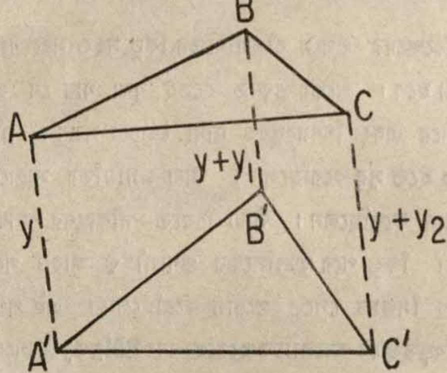
6.1 নং চিত্র

অর্থাৎ $\dfrac{b_1{}^2 + c_1{}^2}{2} \geqslant b_1c_1 \cos\theta_1$। সমতাচিহ্ন প্রযুক্ত হবে যখন $\theta_1 = 0$ বা π।

যেহেতু $-1 \leqslant \cos\theta_1 \leqslant 1$, $\dfrac{b_1{}^2 + c_1{}^2}{2} \geqslant b_1c_1$ ... (6.1)

এইরূপ প্রণালী তিনটি চলের ক্ষেত্রেও যে পাওয়া যেতে পারে তা দেখান সমীচীন হবে। ধরা যাক আমরা ABC ত্রিভুজ যার বাহুত্রয় a, b, c একটি সমতলের উপর

অভিক্ষেপ করে একটি সমবাহু ত্রিভুজ পাই। অভিক্ষেপ অবশ্যই সমতলের উপর লম্ব দিয়ে করা হয়েছে। d সমবাহু ত্রিভুজের বাহু ধরা হল। যদি A, B, C বিন্দুত্রয়ের সমতল হতে উচ্চতা যথাক্রমে $y, y+y_1, y+y_2$ হয় পীথাগোরাসের উপপাদ্যের সাহায্যে (6.2 নং চিত্র দ্রষ্টব্য) নীচের তিনটি সমীকরণ পাই :



6.2 নং চিত্র

$$a^2 = d^2 + (y_1 - y_2)^2,\ b^2 = d^2 + y_2^2,\ c^2 = d^2 + y_1^2 \quad \ldots \quad (6.2)$$

(6.2) হতে y_1, y_2 অপনয়ন করে পাই

$$3d^4 - 2d^2(a^2 + b^2 + c^2) + 16\Delta^2 = 0, \quad \ldots \quad (6.3)$$

যেখানে $\triangle$ নির্দেশ করছে ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল। (6.3) সমীকরণের মূল দুইটি ধনাত্মক এবং বাস্তব হবে যদি

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4\sqrt{3}\Delta \quad \ldots \quad (6.4)$$

(6.4) অসমতাকে পুঙ্খানুপুঙ্খরূপে খুঁটিয়ে দেখলে পাই যে এটি নীচের অসমতার ভিন্নরূপ :

$$a^4 + b^4 + c^4 \geqslant b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2$$

অর্থাৎ $(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2 \geqslant 0 \quad \ldots \quad (6.5)$

সমতা সত্য হবে যখন ত্রিভুজটি নিজেই সমবাহু। লক্ষ্য করবার বিষয় যে ত্রিভুজের অসমতা, অর্থাৎ ত্রিভুজের যে কোন দুইটি বাহুর যোগফল অপরবাহু অপেক্ষা বড়, ব্যবহার করবার দরকার হয় নাই যদিও আমরা ত্রিভুজ দিয়ে শুরু করেছি।

বিকল্পে, যদি ABC ত্রিভুজের তল এবং অভিক্ষেপের তলের ভিতর θ কোণ উৎপন্ন হয়, যেহেতু সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $\frac{1}{4}\sqrt{3}d^2$,

$$\frac{1}{4}\sqrt{3}d^2 = \triangle \cos\theta \quad \ldots \quad (6.6)$$

(6.6) হতে d^2 এর মান (6.3) তে বসিয়ে পাই

$$\cos^2\theta - \frac{a^2+b^2+c^2}{2\sqrt{3}\triangle}\cos\theta + 1 = 0 \quad \ldots \quad (6.7)$$

(6.7) সমীকরণের একটি মূল 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর এবং অপরটি 1 অপেক্ষা বৃহত্তর হবে যেটি $\cos\theta$-এর মান অবাস্তব দেবে। (6.7)-কে পুনর্বিন্যাস করে লিখে

$$(\cos\theta + \sec\theta) = \frac{a^2+b^2+c^2}{2\sqrt{3}\triangle} \text{।} \quad \ldots \quad (6.8)$$

যেহেতু θ সূক্ষ্মকোণ $\cos\theta + \sec\theta \geqslant 2$ এবং কাজেই

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant 4\sqrt{3}\triangle \text{।} \quad \ldots \quad (6.9)$$

এবার যে কোন দুইটি ত্রিভুজের সঙ্গে যুক্ত অসমতা নির্ণয় করব। পূর্বের ক্ষেত্রে আমরা লম্ব অভিক্ষেপের সাহায্যে সিদ্ধান্ত পেয়েছিলাম। লম্ব অভিক্ষেপের সাহায্যে সমবাহু ত্রিভুজ d বাহুর দৈর্ঘ্যের পাওয়া গিয়েছিল। কিন্তু ABC ত্রিভুজকে লম্ব অভিক্ষেপের সাহায্যে অন্য যে কোন নির্দিষ্ট ত্রিভুজ $A'B'C'$ পেতে পারি। তবে নীচের প্রত্যেকটি অনুরূপ বাহুর জন্য অসমতাটি পাওয়া যেতে পারে ঃ

$$a^2(b'^2+c'^2-a'^2)+b^2(a'^2-b'^2+c'^2)+c^2(a'^2+b'^2-c'^2)$$
$$\geqslant 16\triangle\triangle' \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (6.10)$$

$\triangle, \triangle'$ যথাক্রমে $ABC, A'B'C'$ ত্রিভুজদ্বয়ের ক্ষেত্রফল। (6.10) অসমতাটির প্রমাণ বিশেষ কঠিন নয় ; কারণ

$$a^2 = a'^2 + (y_1+y_2)^2,\ b^2 = b'^2 + y_2{}^2,\ c^2 = c'^2 + y_1{}^2 \quad \ldots \quad (6.11)$$

6.3 নং চিত্র দ্রষ্টব্য।

অর্থাৎ, $a^2 - a'^2 = (b^2 - b''^2) + (c^2 - c'^2) - 2y_1y_2$

বা $\{(a^2-b^3-c^2)-(a'^2-b'^2-c'^2)\}^2 = 4(c^2-c'^2)(b^2-b'^2)$

বা $(a^2-b^2-c^2)^2-(a'^2-b'^2-c'^2) = 4(c^2-c'^2)(b^2-b'^2)$

বা $(a^2-b^2-c^2)^2+(a'^2-b'^2-c'^2)^2 = 4(c^2-c'^2)(b^2-b'^2)+$
$$+2(a^2-b^2-c^2)(a'^2-b'^2-c'^2)$$

বা $\{(a^2-b^2-c^2)^2-4b^2c^2\}+\{(a'^2-b'^2-c'^2)-4b'^2c'^2\}-$
$-\{2a^2(b'^2+c'^2-a'^2)+2b^2(b'^2-c'^2+a'^2)+2c^2(a'^2-b'^2+c'^2)\}$
$=0$

বা

$$16\triangle^2+16\triangle'^2\cos^2\theta-2\{a^2(b'^2+c'^2-a'^2)+b^2(-b'^2+c'^2+a'^2)+c^2(a'^2+b'^2-c'^2)\}=0$$

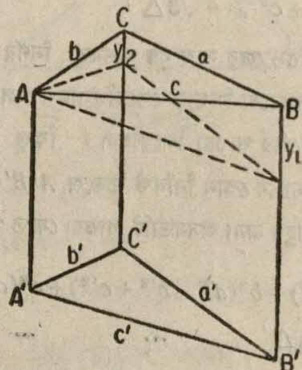
বা

$$16(\triangle-\triangle'\cos\theta)^2+2.16.\triangle\triangle'\cos\theta-2\{a^2(b'^2+c'^2-a'^2)+b^2(-b'^2+c'^2+a'^2)+c^2(a'^2-b'^2+c'^2)\}=0 \quad \dots \quad (6.12)$$

যেহেতু $\cos\theta \leqslant 1$, আমরা নীচের অসমতাটিকে পাই :

$$a^2(b'^2+c'^2-a'^2)+b^2(a'^2+c'^2-b'^2)+c^2(a'^2+c'^2-b'^2) \geqslant 16\triangle\triangle' \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (6.13)$$

সমতা সত্য হবে যদি $\triangle$, $\triangle'$ উভয়েই সমবাহু ত্রিভুজ হয়।



6.3 নং চিত্র

উপরের জ্যামিতিক প্রশ্নগুলি হতে কিরূপে বীজগণিতের অসমতা নির্ণয় করা হল সেগু লি আরও বিশদ আলোচনা করার আগে কেন এসব আলোচনার দরকার তার আলোচনা করব। অনেক ব্যক্তির কাছে জ্যামিতি অতি অবশ্য ছবির সঙ্গে যুক্ত মনে হয় কিংবা একটি অঙ্কনের সঙ্গে যুক্ত। অবশ্যই আমরা এখন বেশ অবহিত, যদিও ইউক্লিড এ দিকটা লক্ষ্য করেন নাই, যে ছবি এ'কে যুক্তি স্থাপন কবতে হলে বেশ সাবধানে করা উচিত। এসব ক্ষেত্রে অনেক সময় আমরা এমন কোন সিদ্ধান্তে এসে পৌঁছাতে পারি যেগুলি স্বতঃসিদ্ধগুলি হতে নির্ণেয় নয় এবং কাজেই নির্ভুল সিদ্ধান্তে আসা হল না। এই দিকটা আংশিক কারণ হতে পারে যেজন্য জ্যামিতি

বিষয়টির বিরুদ্ধেই আক্রমণ করা হয়। অনেকের মধ্যে ডিউডনে ইউক্লিডের জ্যামিতির ঘোর বিরোধী এবং তা একটি বইতেও তিনি বিশদভাবে লিপিবদ্ধ করেছেন। বইটি শিক্ষকদের জন্য লিখিত এবং বিদ্যালয়ে ইউক্লিডের জ্যামিতির পরিবর্তে নতুন ধারা জানবার উদ্দেশ্যে লেখা। বইটির মধ্যে কোন ছবির স্থান নাই, যদিও জ্যামিতিক ধারণার প্রতি আবেদনে কোন বাধা নাই। তিনি বিশ্বাস করেন যে প্রাথমিক জ্যামিতির সঙ্গতভাবে পাঠদান সম্ভব। এই প্রণালী মানসিক বিকাশের পক্ষে খুবই হিতকারী হবে। তিনি সংকেত দিয়েছেন যে ত্রিভুজের, ত্রিকোণমিতির, বৃত্তের এবং বৃত্তমালার বিভিন্ন বিশেষ ধর্মের বিস্তৃত আলোচনার বিশেষ দরকার নাই। কৌতূহলের বিষয় যে ত্রিকোণমিতির বইগুলি সূত্রগুলিতে ভর্তি এবং সূত্রগুলি জ্যোতির্বিদের, ভূমি পরিমাপকদের কাজে লাগে। বিদ্যালয়ের ছাত্রছাত্রীদের এইগুলি জীবিকার জন্য নিশ্চয়ই বাধ্যতামূলকভাবে শিক্ষা দেওয়া উচিত নয়। তিনি আরও বলেছেন যে 'ত্রিভুজকে পাঠ্যবস্তু থেকে সরিয়ে দেওয়া উচিত'। তিনি ত্রিভুজকে পৃথকভাবে পাঠ্যবস্তুতে উল্লেখ করার বিরোধী এবং প্রাথমিক জ্যামিতিতে ত অবশ্যই উল্লেখ নিষিদ্ধ করা উচিত। কিন্তু তাঁর প্রাথমিক জ্যামিতির চিরাচরিত প্রথার এত বিরোধিতা সমীচীন নয়। আমরা দেখাব যে ত্রিভুজের বিষয়ের ধারণা বা বৃত্তমালার বিষয়ে ধারণা অনেক প্রশ্নের সমাধানে সহায়তা করে।

1·1. প্রথম প্রশ্ন হিসাবে পূর্বে যেটি আলোচনা করেছি তাতে দেখিয়েছি যে জ্যামিতিক চিন্তাধারা নীচের বিষয়ে সহায়তা করেছে ঃ

ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি হতে একটি পৃথক তলের উপর লম্ব টানা হল। প্রশ্ন এখন এই যে সবসময়ই কি অভিক্ষেপের তলে সমবাহু ত্রিভুজ এরূপে পাওয়া সম্ভব?

যদি a, b, c ত্রিভুজের তিনটি বাহু হয়, উপরোক্ত প্রশ্নের সমাধান

$$(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2+(a^2-b)^2 \geqslant 0 \qquad \ldots \quad (6.14)$$

অতএব পরের প্রশ্ন হবে যে কোন নির্দিষ্ট ত্রিভুজ *ABC* কে কোন তলে যে কোন নির্দিষ্ট আকারের ত্রিভুজে লম্বভাবে অভিক্ষেপ করা যায় যদি অভিক্ষেপিত ত্রিভুজের বাহুগুলি ka', kb', kc' হয়? পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে পাওয়া যায়,

$$16\triangle' k^4 - 2\Theta k^2 + 16\triangle^2 = 0 \qquad \ldots \quad (6.15)$$

যেখানে $\triangle'$, $A'B'C'$ অর্থাৎ a', b', c' বাহুর ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল এবং

$$\Theta = a^2(-a'^2+b'^2+c'^2)+b^2(a'^2-b'^2+c'^2)+c^2(a'^2+b'^2-c'^2) \quad \ldots \quad (6.16)$$

উপরের সমীকরণ (6.15) পাওয়া যায় নিম্নরূপে ঃ

$$a^2=k^2a'^2+(y_1-y_2)^2,\ b^2=k^2b'^2+y_2{}^2,\ c^2=k^2c'^2+y_1{}^2 \quad \ldots \quad (6.17)$$

(6.17) হতে y_1, y_2 অপনয়ন করে (6.15) পাওয়া যাবে। এই সমীকরণের বাস্তব মূল থাকতে হলে

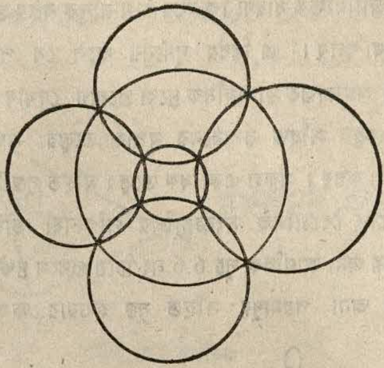
$$\Theta^2 > (16\triangle\triangle')^2$$

অর্থাৎ $$\Theta > 16\triangle\triangle' \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (6.18)$$

দুইটি ত্রিভুজের অভিক্ষেপের সম্পর্কের শর্ত। উপরের আলোচনার জন্য প্রবন্ধ বা গ্রন্থ হিসাবে পেডো [1], [2], [3], ডিউডনে [4] এর উল্লেখ করা হল।

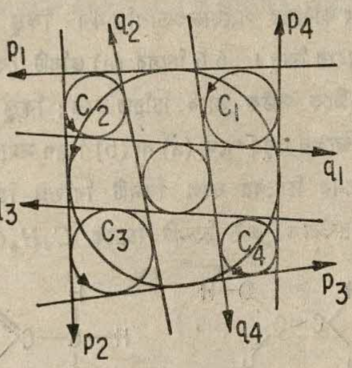
1.2. জ্যামিতিক চিন্তার উপকারিতা বিষয়ে দ্বিতীয় উদাহরণ ছয়টি বৃত্তের সমাহার প্রশ্ন বলে পরিচিত। একটি তলে C_1, C_2, C_3, C_4 চারটি বৃত্ত অবস্থিত এবং আমরা ধরে নিলাম যে C_1, C_2 বৃত্ত দুইটি P_1, Q_1 বিন্দু দুইটিতে ছেদ করে, C_2, C_3 বৃত্তদুইটি P_2, Q_2 বিন্দু দুইটিতে ছেদ করে, C_3, C_4 বৃত্ত দুইটি P_3, Q_3 বিন্দু দুইটিতে এবং C_4, C_1 বিন্দু দুইটি P_4, Q_4 বিন্দু দুইটিতে ছেদ করে। এখন এই উপপাদ্যের সিদ্ধান্ত এই যে যদি P_1, P_2, P_3, P_4 বিন্দু চারটি একই বৃত্তস্থ হয়, তবে Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 বিন্দু চারটিও অপর একটি বৃত্তস্থ হবে। এই সুপরিচিত উপপাদ্যের জটিল রাশি ব্যবহার করে প্রমাণ দেওয়া হয়েছে আগেই অর্থাৎ ব্যবহার করা হয়েছে শুধুমাত্র $a+ib$, $i^2=-1$। যদিও এ উপপাদ্যকে খুবই অনবদ্য মনে হয়, কিন্তু বিশেষত্ব হিসাবে এর অনন্যতা কিছু নাই। এরূপ অনেক সাধারণ উপপাদ্য প্রাথমিক জ্যামিতির মধ্যে ছড়িয়ে ছিটিয়ে আছে। অবশ্য এই উপপাদ্য হতে উত্তরসিদ্ধান্তগুলির নিশ্চিতই উল্লেখযোগ্য ভূমিকা আছে। 6.4 নং চিত্র দ্রষ্টব্য।

প্রমাণটি গণিতবিদদের কল্পনা উদ্দীপিত করে যেহেতু $a+ib$ জটিল রাশির প্রয়োগ করে যখন নতুন জ্যামিতির উপপাদ্য পাওয়া যায় তখন নতুন ধরনের জটিল



6.4 নং চিত্র

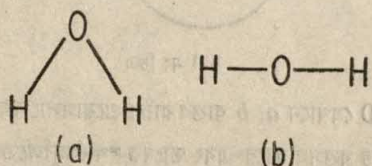
রাশি $a+\epsilon b$, $\epsilon^2=0$ যেখানে a, b বাস্তব রাশি প্রয়োগসাপেক্ষ। এই নতুন রাশির প্রয়োগ দিক নির্দেশিত বৃত্তসমাহারে এবং তাদের স্পর্শকগুলিতে করা হবে। 6.5 নং চিত্র দ্রষ্টব্য। যদি C_1, C_2, C_3, C_4 চারটি দিক নির্দেশিত বৃত্ত একটি তলে



6.5 নং চিত্র

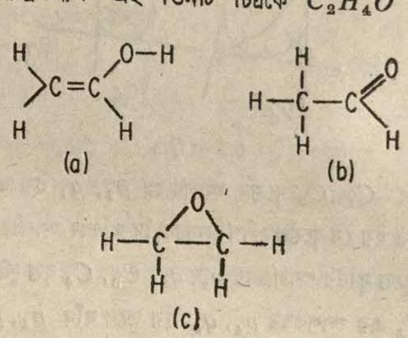
অবস্থিত থাকে এবং C_1, C_2 বৃত্তের স্পর্শকদ্বয় p_1, q_1 হয় এবং p_1, q_1 দিক এমনভাবে নির্দেশিত হয় যে বৃত্তের স্পর্শবিন্দুতে দিক এবং স্পর্শকের দিক একই থাকে, অনুরূপ C_2, C_3 বৃত্তে দুটির স্পর্শকদ্বয় p_2, q_2, C_3, C_4 বৃত্ত দুইটির স্পর্শকদ্বয় p_3, q_3 এবং C_4, C_1 এর স্পর্শকদ্বয় p_4, q_4 হয় তবে যদি p_1, p_2, p_3, p_4 স্পর্শক চারটিকে একটি দিক নির্দেশিত বৃত্ত স্পর্শ করে, q_1; q_2, q_3, q_4 স্পর্শক চারটিকেও অপর একটি বৃত্ত দিকনির্দেশিত হয়ে স্পর্শ করে। এই উপপাদ্যের প্রমাণ মেধাবী ছাত্র-ছাত্রীদের জন্য রেখে দেওয়া হল। প্রবন্ধের উল্লেখ হিসাবে দেওয়া হল জাগ্‌লেম্‌ [5]।

1.3. এরপর জ্যামিতিক ধারণা কি করে রাসায়নিক বস্তুর প্রকৃতি নির্ণয় করতে সাহায্য করে তার কথা বলব। এ বিষয় ঘূর্ণনের ফলে যে পরিবর্তন আসে তার জ্যামিতি বিশদভাবে অঙ্গারাত্মক রাসায়নিক দ্রব্যে প্রয়োগ দেখাব। আমরা গণিতের জালিতত্ত্ব বা গ্রাফতত্ত্বের সহিত রসায়নের রূপান্তরতত্ত্বের সম্পর্কের সাধারণ সূত্র প্রতিষ্ঠিত করতে চেষ্টা করব। সকল একাধিক তত্ত্বের সহিত যুক্ত বিষয়বস্তু আলোচনার আগে একাধিক বিষয়ের বৈজ্ঞানিক সংজ্ঞাগুলির পরিভাষা ভাষ্য সহ বলে দেওয়া উচিত হবে। জলের জন্য আণবিক সূত্র 6.6 নং চিত্রে প্রথমে দ্রষ্টব্য। রাসায়নবিদেরা প্রত্যেকটি পরমাণুর অন্য পরমাণুর সহিত যুক্ত হওয়ার ক্ষমতাকে বলে থাকেন



6.6 নং চিত্র

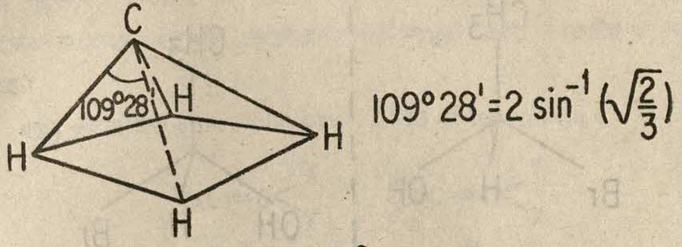
সংযোজকতাশক্তি এবং কার্বনের সংযোজকতাশক্তি 4। কিন্তু গণিতবিদেরা বলবেন কার্বন চার রেখার সমাহার বিন্দু। 6.6 চিত্রের (a) ছবিটি বেশী যুক্তিসহ মনে করা হয় কারণ এ ছবি অণুটিকে সঠিক ভাবে চিত্রিত করে; কিন্তু (b) ছবিটি ছাপানর পক্ষে সহজ। অবশ্য জলের অণুর পক্ষে (a) বা (b) চিত্রণ সমার্থক। কিন্তু C_2H_4O (a), (b) ও (c) ধরনের চিত্রণের ফলে তিনটি বিভিন্ন জিনিষ দেখিয়ে দেবে। 6.7 নং চিত্র সেজন্য দ্রষ্টব্য। এই তিনটি চিত্রকে C_2H_4O অণুর রেখাচিত্র বলা



6.7 নং চিত্র

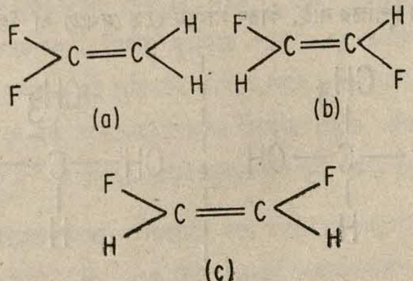
যেতে পারে। '–' চিহ্ন এক সংযোজকতাশক্তিজ্ঞাপক, '=' চিহ্ন দুই সংযোজকতা-শক্তিজ্ঞাপক। এরূপ বিভিন্ন প্রকারের পরমাণুর বিভিন্ন পরিস্থিতিতে একই অণুর

চিত্রণকে বলা হয় অনুরূপান্তর। মিথেন এর রেখাচিত্রের জন্য 6.8 নং চিত্র দ্রষ্টব্য।



6.8 নং চিত্র

কার্বনের সংযোজন বাহুগুলি পরস্পর 109°28′ কোণ উৎপন্ন করে। লক্ষ্যণীয় যে $109°28' = 2\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$। কিন্তু অনেক সময় বেশ জটিল অণু সহজ সরল অণুর ন্যায় আচরণ করে। উদাহরণ হিসাবে লেখা যায় $C_2H_2F_2$ এবং সেজন্য 6.9 নং চিত্র দ্রষ্টব্য। এক্ষেত্রে একই তলে অণুর রেখাচিত্র অঙ্কন বা বিভিন্ন তলে

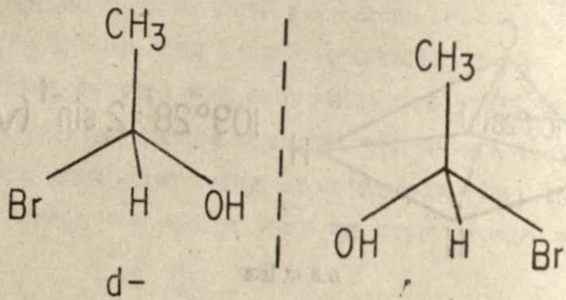


6.9 নং চিত্র

অঙ্কন সমার্থক। কিন্তু একটি অণুর মধ্যে পরমাণুগুলির বিভিন্ন জ্যামিতিক অবস্থানের জন্য বিভিন্ন রূপান্তর যেগুলি সম্ভব তা নীচে দেওয়া হল।

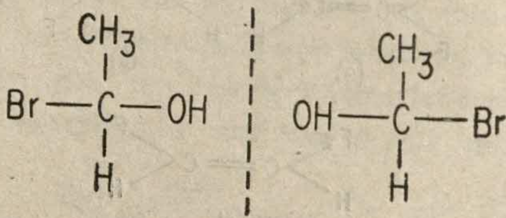
- রূপান্তর
  - দিক নির্দেশিত রূপান্তর
    - দৃষ্টি বিষয়ক রূপান্তর
    - জ্যামিতিক রূপান্তর
  - গঠনতান্ত্রিক রূপান্তর
    - কার্বন কাঠামোর রূপান্তর
    - অন্যান্য রূপান্তর

দৃষ্টি বিষয়ক রূপান্তরের উদাহরণ নীচে দেওয়া হল 6.10 নং চিত্র দ্রষ্টব্য। বামদিকের চিত্রটি ও ডানদিকের চিত্রটি যথাক্রমে *d*– এবং *l*– ব্রোমোমিথানল। এই দুইটি



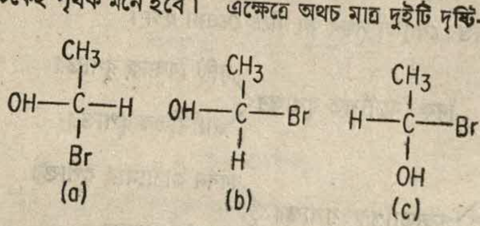
6.10 নং চিত্র

দ্রব্যেরই রাসায়নিক এবং ভৌতিক ধর্ম একটি দিক ব্যতীত একই। কেবলমাত্র d – দ্রব্যটি ধ্রুবীয়কৃত রশ্মিকে ডানদিকে এবং *l*– দ্রব্যটি ধ্রুবীয়কৃত রশ্মিকে বামদিকে ঘুরিয়ে দেয়। এক্ষেত্রে সমতলীয় চিত্র ঠিকভাবে এই ধর্মের পার্থক্য দেখায় না যদিও প্রতিফলন দেখায়। 6.11 নং চিত্র হতে পরিষ্কারভাবে বোঝা যাবে। এক্ষেত্রে মনে হওয়া স্বাভাবিক যে কোন রূপান্তর নাই, কারণ সামনে হতে দেখলে বা পিছন হতে দেখলে



6.11 নং চিত্র

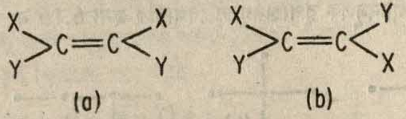
দুইটি রূপান্তরকে একই মনে হতে পারে। কিন্তু আবার 6.12 নং চিত্রে তিনটি ছবির প্রত্যেকটিকেই পৃথক মনে হবে। এক্ষেত্রে অথচ মাত্র দুইটি দৃষ্টি-বিষয়ক রূপান্তর



6.12 নং চিত্র

আছে। কারণ (b) এবং (c) সমার্থক যদি ভিন্নতলের ছবি আঁকা যায়। ব্রোমোমিথানলের যে মাত্র দুইটি দৃষ্টিবিষয়ক রূপান্তর আছে তা ঐতিহাসিক দৃষ্টিকোণ হতে গুরুত্বপূর্ণ। কারণ এই ঘটনার আবিষ্কার স্থিরভাবে প্রতিষ্ঠিত করেছে যে কার্বনের সংযোজন বাহুগুলি চতুস্তলকের শীর্ষবিন্দুমুখী এবং সমতলীয় রেখাচ্ছেদ নহে।

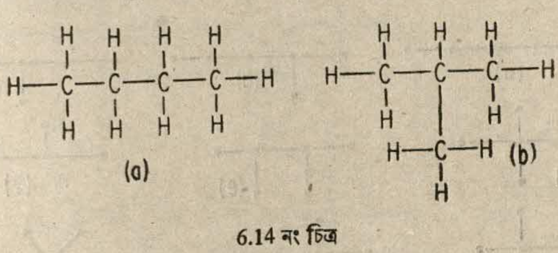
এবার জ্যামিতিক রূপান্তর বর্ণনা করব। 6.13 নং চিত্র আঁকলাম।



6.13 নং চিত্র

X, Y অক্ষরগুলি বিভিন্ন পরমাণু নির্দেশ করে। উপরের (*a*) চিত্র 'সমঅণু-সমদিক' অবস্থা নির্দেশ করে এবং (b) চিত্র 'সমঅণু বিপরীত দিক' নির্দেশ করে। 'সমঅণু সমদিক' অবস্থা হতে 'সমঅণু বিপরীত' দিক অবস্থায় আসতে হলে 'সংযোজনকারী দ্বিবাহুকে' অক্ষ রেখে ঘূর্ণন দিতে হবে একটি মাত্র দিকে। অণুগুলি জ্যামিতিক অর্থে একই অবস্থায় আছে। কিন্তু রাসায়নিক কারণে এদুটি পৃথক, কারণ 'সংযোজনকারী দ্বিবাহু' মুচড়িয়ে পড়ে এবং স্বভাবতঃ বাধা পায় এই পরিবর্তনে। উত্তপ্ত অবস্থায় এই পরিবর্তন আসতে পারে। জ্যামিতিক দৃষ্টিকোণ থেকে এই অর্থে পৃথক যে এক অবস্থা হতে অপর অবস্থায় কোন প্রতিসরণ বা প্রতিফলন দিয়ে আসা যায় না। দুই অবস্থার একই রাসায়নিক ধর্ম, কিন্তু ভৌতধর্ম পৃথক।

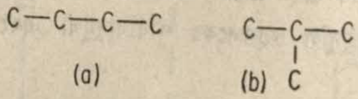
1.4. এরপরের আলোচনার বিষয়বস্তু হবে 'কার্বন কঙ্কাল রূপান্তর'। 6.14 নং চিত্র দ্রষ্টব্য। এখানে C_4H_{10} এর দুইটি রূপান্তর দেখান হয়েছে।



6.14 নং চিত্র

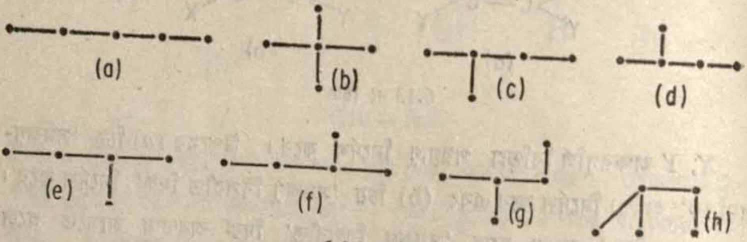
সাধারণভাবে এ্যালকেন C_nH_{2n+2} এরূপ ধর্ম দিয়ে থাকে। অবশ্য $n=4$ আসা পর্যন্ত রূপান্তর দেয় না। উপরের ছবি হতেই এ বোধগম্য হবে।

গঠনমূলক রূপান্তরগুলি স্থানাকৃতির দিক হতে বিভিন্ন, কিন্তু তাদের গঠনকাঠামোর কঙ্কালে একই সংখ্যক গ্রন্থি এবং বাহুগুলি একইরূপ। এজন্য 6.15 নং চিত্র দ্রষ্টব্য।



6.15 নং চিত্র

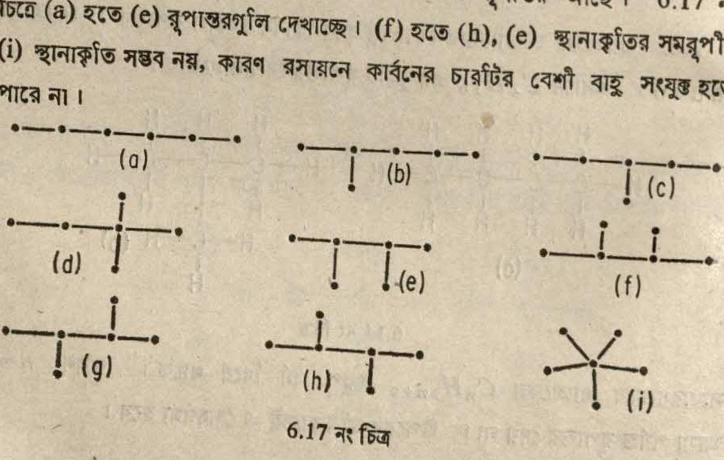
C_5H_{12} এর গঠনমূলক রূপান্তরগুলি দেখাবার জন্য 6.16 নং চিত্র দ্রষ্টব্য।



6.16 নং চিত্র

উপরের চিত্রের (a), (b), (c) গুলি গঠনমূলক রূপান্তর এবং বিভিন্ন। কিন্তু (c) এর অনুরূপ কয়েকটি গঠন রয়েছে। একটু ভাল করে দেখলেই বুঝা যাবে যে কোণগুলির কাঠামো একইরূপ। স্থানাকৃতির দিক হতে (c) এর সঙ্গে (d), (e), (f) এর সাদৃশ্য দেখা যায়। (d), (e), (f) পাওয়া যায় অনায়াসেই (c) হতে প্রতিসরণ, প্রতিফলন বা প্রতিঘূর্ণনের সাহায্যে। এর অর্থ যে জ্যামিতিক দিক হতে এগুলি সমার্থক।

n এর মান যখন 6, C_nH_{2n+2} এ্যালকেনের 5টি রূপান্তর আছে। 6.17 নং চিত্রে (a) হতে (e) রূপান্তরগুলি দেখাচ্ছে। (f) হতে (h), (e) স্থানাকৃতির সমরূপী। (i) স্থানাকৃতি সম্ভব নয়, কারণ রসায়নে কার্বনের চারটির বেশী বাহু সংযুক্ত হতে পারে না।



6.17 নং চিত্র

অঙ্গারাত্মক রসায়নের বই হতে যে সারণি পাওয়া তা হতে রূপান্তরের সংখ্যা পেতে সাহায্য করবে।

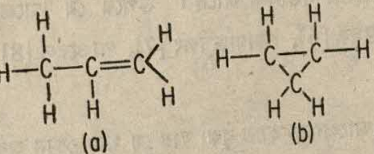
n	4	5	6	7	8	9	10	15	20
রূপান্তর সংখ্যা	2	3	5	10	18	35	75	4375	366319

1.5. যদি অঙ্গারাত্মক যৌগিক পদার্থে x-হাইড্রোজেন পরমাণু এবং n কার্বন পরমাণু থাকে তবে সংযোজন বাহুর সংখ্যা $\frac{1}{2}(4n+x)$। কিন্তু যদি n কার্বন পরমাণু, একটি বৃক্ষ তৈরী করে, $(n-1)$ সংযোজক বাহুর সংখ্যা হবে কার্বন অণুগুলির মধ্যে। পুনরায় কার্বন পরমাণু এবং হাইড্রোজেন পরমাণুর মধ্য x-সংযোজক বাহু আছে। এই দুইটি সম্বন্ধের সমীকরণ লিখলে পরে পাই

$$\tfrac{1}{2}(4n+x)=(n-1)+x$$

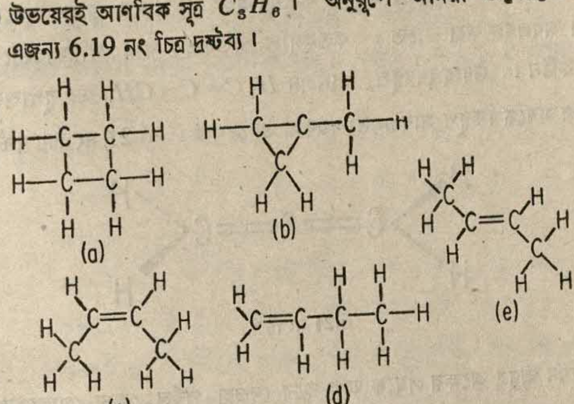
অর্থাৎ $x=(2n+2)$ ... ... (6.19)

এবং ইহাই রাসায়নিক সূত্রে লিখিত আছে। যদি কার্বনের পরমাণুর কোন শৃঙ্খল সৃষ্টি হয় তবে x এর সংখ্যা $(2n)$ হবে। এমনকি যদি দুইটি সংযোজক বাহুর জোড়েরও সৃষ্টি হয় তাকে আমরা শৃঙ্খল বলতে পারব। উদাহরণ হিসাবে C_3H_6 অণু নেওয়া হল। এখন 6.18 নং চিত্র দ্রষ্টব্য।



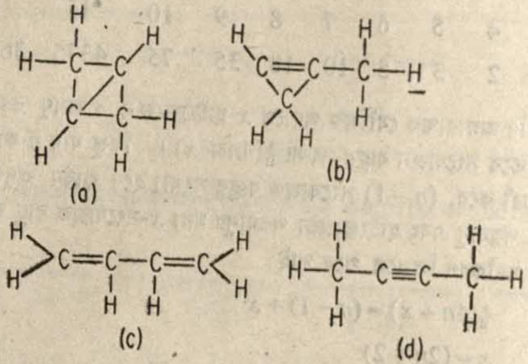
6.18 নং চিত্র

(a), (b) উভয়েরই আণবিক সূত্র C_3H_6। অনুরূপে আমরা C_4H_8 কে আঁকতে পারি। এজন্য 6.19 নং চিত্র দ্রষ্টব্য।



6.19 নং চিত্র

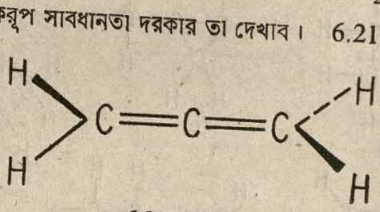
6.20 চিত্রে দুইটি দ্বিবাহু সংযোজক বা একটি তিনবাহু সংযোজকের শৃঙ্খল বা দুইটি শৃঙ্খল বা একটি শৃঙ্খল দেখান হয়েছে।



6.20 নং চিত্র

উপরের ছবিগুলির (a) তে দুইটি শৃঙ্খল, (b) তে একটি শৃঙ্খল, (c) তে দুইটি দ্বিবাহুর শৃঙ্খল এবং (d) তে একটি তিনবাহুর শৃঙ্খল আছে। যদি $x = 2n - 2$ হয় উপরের ন্যায় 4টি বিভিন্ন সম্ভাবনা আছে। উপরে যে আলোচনা হল তার জন্য গ্রন্থপঞ্জী হিসাবে বাউসর [6], কোয়াড্‌লিং [7], পাওয়েল [8] ও শোয়েনল্যাণ্ড [9] উল্লেখ করা হল।

1.6. উপরের আলোচনা হতে বুঝা যায় যে যদি কোন অবস্থা হতে অপর কোন অবস্থায় যদি প্রতিসরণ, ঘূর্ণন বা প্রতিফলন দিয়ে আসা যায়, তবে তাকে রূপান্তর গণ্য করা চলবে না। কিন্তু প্রতিফলন দলকে একই রূপান্তরে রাখা বিষয়ে কিছুটা সাবধানতা অবলম্বন করা উচিত। কতকগুলি প্রতিফলন কার্য পরিষ্কারভাবে প্রদর্শন করা বেশ কঠিন। উদাহরণস্বরূপ, এ্যালিন $H_2C = C = CH_2$ এর রূপান্তর বিষয়ে ভুলপ্রমাদের সম্বন্ধে কিরূপ সাবধানতা দরকার তা দেখাব। 6.21 নং চিত্র দ্রষ্টব্য।

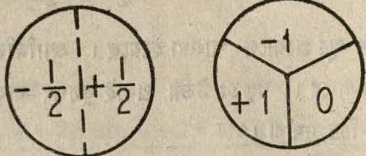


6.21 নং চিত্র

দুইটি অর্ধঘূর্ণন অণুর অক্ষের লম্বকে অক্ষ করে দেওয়া পর্যন্ত কোন গোলযোগ নাই। অণুর অক্ষ বলতে $C = C = C$ অক্ষ বোঝাবে। এরপরে যদি 6.21 নং চিত্র দুইটি

বিপরীত বাহু ধরে ধীরে ধীরে 180° ঘুরিয়ে দেওয়া যায়, অণুটির দুইটি প্রান্ত যাদুমন্ত্রের ন্যায় পরস্পর স্থান পরিবর্তন করবে।

অনুরূপ অবস্থার সৃষ্টি হয় যদি n নিউক্লিয়াসের পরমাণুর ভিতর ঘূর্ণন I থাকে তার ফলে n.m.r. স্পেক্ট্রোস্কোপের ছবি কত বিভিন্ন রকমের সম্ভব দেখা যাবে। ঘূর্ণন $I = -\frac{1}{2}$ বা $\frac{1}{2}$ হতে পারে বা পরমাণুর নিউক্লিয়াসের ঘূর্ণন অবস্থা 0, +1, −1 হতে পারে। এখন 6.22 নং চিত্র দ্রষ্টব্য।



6.22 নং চিত্র

n.m.r. অবস্থার সংখ্যা

$I = \pm\frac{1}{2}$	$n=1$	1	1						
	2	1	2	1					
	3	1	3	3	1				
	4	1	4	6	4	1			
	5	1	5	10	10	5	1		
	6	1	6	15	20	15	6	1	
	7	1	7	21	35	35	21	7	1
	8	1	8	28	56	70	56	28	1

উপরের সরণি বুঝতে অসুবিধা নাই, কারণ এগুলি সবকয়টি $+\frac{1}{2}$ বা $-\frac{1}{2}$ বা উভয়ের মিশ্রণের অবস্থার সংখ্যা নির্দেশ করেছে। নীচে $I = \pm 1, 0$ অবস্থা সরণি দেওয়া হল।

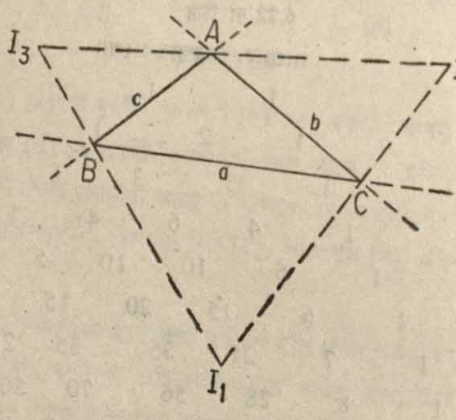
$I = \pm 1, 0$	$n=1$	1	1	1									
	$n=2$	1	2	3	2	1							
	$n=3$	1	3	6	7	6	3	1					
	$n=4$	14	10	16	19	16	10	4	1				
	$n=5$	1	5	15	30	45	51	45	30	15	5		
	$n=6$	1	6	21	50	90	126	141	126	90	50	21	6

এখানেও সরণিগুলির ব্যাখ্যা পূর্বের ন্যায় একইরূপ।

2. পূর্বের পরিচ্ছেদগুলিতে জ্যামিতিক ধারণা হতে বীজগণিতের সিদ্ধান্তে আসা বা এর প্রতিবর্ত বিশদভাবে আলোচনা করা হয়েছে। কাজেই এবার ত্রিভুজ হতে কিছু সাধারণ ত্রিকোণমিতির সিদ্ধান্ত আলোচনা করা অসমীচীন হবে না। আমরা প্রথমে একটি খুবই সরল প্রশ্নের আলোচনা করব। সকলের কাছেই পরিচিত সম্বন্ধ

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \quad \cdots \quad (6{\cdot}20)$$

ত্রিকোণমিতির অনেক সূত্র প্রয়োগে পাওয়া হয়েছে। জ্যামিতিও কিন্তু এ বিষয়ে যথেষ্ট সাহায্য করতে পারে। বস্তুতঃ উভয় প্রথাই যুগপৎ ব্যবহৃত ও সমৃদ্ধ হওয়া বাঞ্ছনীয়। 6·23 নং চিত্র দ্রষ্টব্য।



6.23 নং চিত্র

I_1, I_2, I_3, ABC ত্রিভুজের বহিঃকেন্দ্রত্রয়। অতএব (6·20) $I_1\,I_2\,I_3$ ত্রিভুজে প্রয়োগ করে আমরা পেতে পারব

$$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}=$$

$$4\cos\frac{B+C}{4}\cos\frac{C+A}{4}\cos\frac{A+B}{4} \quad \cdots \quad (6{\cdot}21)$$

বিপরীত দিক হতে চিন্তা করলে ABC ত্রিভুজ

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C\text{।}$$

পুনরায় O যদি ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র হয় এবং R পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ, তবে

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=\frac{2}{R^2}(\triangle BOC+\triangle COA+\triangle AOB)$$

$$=\frac{2\triangle}{R^2},\ \triangle = ABC \text{ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল} \qquad \ldots \quad (6{\cdot}22)$$

অর্থাৎ, $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=\dfrac{BC \sin A}{R^2}=4 \sin A \sin B \sin C$ ... (6·23)

(6·20) এর বামদিক হতে

$$\frac{1}{R}\left(\frac{2R \sin A+2R \sin B+2R \sin C}{2}\right)=\frac{1}{R}\frac{a+b+c}{2}=\frac{s}{R}$$

অর্থাৎ

$$\sin A+\sin B+\sin C=\frac{s}{R} \qquad \ldots \quad (6{\cdot}24)$$

অতএব (6·22), (6·23), (6·24) হতে

$$\left(\frac{2\triangle}{R^2}\right)\Big/\left(\frac{s}{R}\right)=\frac{\sin A \sin B \sin C}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}$$

অর্থাৎ, $\dfrac{\triangle}{Rs}=4 \sin\dfrac{A}{2} \sin \dfrac{B}{2} \sin \dfrac{C}{2}$। ... (6·25)

এখন I যদি ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র এবং r অন্তঃবৃত্তের ব্যাসার্ধ হয়,

$$BIC \text{ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল}=\frac{ra}{2},\ rs=(\triangle BIC+\triangle CIA$$

$$+\triangle AIB)=\triangle \qquad \ldots \quad (6{\cdot}26)$$

কাজেই $r=4R \sin \dfrac{B}{2} \sin \dfrac{A}{2} \sin \dfrac{C}{2}$, (6·25) হতে পাওয়া যায়।

সুতরাং $OI^2=R^2-2rR$, যেহেতু $O(R \sin A, R \cos A)$,

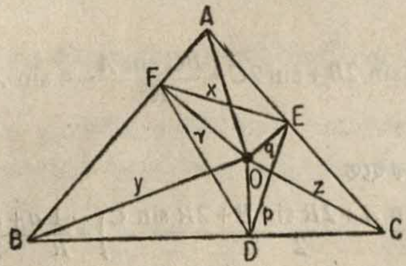
$$I\left(r \tan \frac{B}{2}, r\right)।$$

2.1 এর্ডস্ একজন আধুনিক কালের বিখ্যাত গণিতবিদ্। আমরা একারণে এর্ডস্ ও ওপেনহাইমের জ্যামিতিক প্রশ্নের সমাধান দেব। ধরা যাক O একটি ত্রিভুজের অন্তঃস্থ বিন্দু এবং O বিন্দু হতে x, y, z ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি হতে

দূরত্ব। p, q, r এই বিন্দু O হতে বাহুগুলির দূরত্ব। আমাদের প্রমাণ করতে হবে যে,

$$xyz \geqslant (q+r)(p+r)(p+q) \qquad \dots \quad (6\cdot26)$$

6·24 নং চিত্র দ্রষ্টব্য।



6·24 নং চিত্র

আমরা লিখতে পারি

$$x^2 \sin^2 A = q^2 + r^2 + 2qr \cos A = EF^2$$

$$= (q+r)^2 \cos^2 \frac{A}{2} + (q-r)^2 \sin^2 \frac{A}{2} \qquad \dots \quad (6\cdot27)$$

কারণ

$$\frac{EF}{\sin A} = \frac{OE}{\sin OFE} = \frac{q}{\sin OAE} = x \qquad \dots \quad (6\cdot28)$$

যেহেতু $AFOE$ একই বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। (6·27) হতে পাই

$$x^2 \sin^2 A \geqslant (q+r)^2 \cos^2 \left(\frac{A}{2}\right)$$

অর্থাৎ, $$2x \sin \frac{A}{2} \geqslant (q+r) \qquad \dots \quad (6\cdot29)$$

উপরের রাশি সরল করার পরে এবং বর্গমূল নিয়ে পাওয়া গিয়েছে। অনুরূপভাবে y, z এর জন্য লিখে সবগুলি রাশি গুণ করে

$$8xyz \geqslant (q+r)(r+p)(p+q)/\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \text{।} \quad (6.30)$$

$\frac{A}{2} = l$ এবং $\frac{B}{2} = m$ লিখলে, আমরা পাই

$$\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = E = \sin l \sin m \cos (l+m)$$

$$= \tfrac{1}{2} \sin l (\sin (l+2m) - \sin l) \leqslant \tfrac{1}{8} \dots \quad (6.31)$$

কারণ $\frac{\Delta}{Rs} = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} < 1$ যেহেতু

$$\Delta = \tfrac{1}{2}R(a \cos A + b \cos B + c \cos C) \leqslant Rs \text{।}$$

অতএব

$$xyz \geqslant (q+r)(r+p)(p+q) \text{।}$$

অনুরূপ এরড্স্-মরডেল্ এর উপপাদ্য প্রমাণ করব অর্থাৎ

$$x + y + z \geqslant 2(p+q+r) \quad \dots \quad \dots \quad (6.32)$$

ধরা যাক $\angle P = \widehat{yz},\ \angle Q = \widehat{zx},\ \angle R = \widehat{xy}$ । অতএব

$$yz \sin P \geqslant OD(y+z) \sin \frac{P}{2} = p(y+z) \sin \frac{P}{2} \geqslant 2p\sqrt{yz} \sin \frac{P}{2}$$

অর্থাৎ $\sqrt{yz} \cos \frac{P}{2} \geqslant p$ ।

অনুরূপে $\sqrt{zx} \cos \frac{Q}{2} \geqslant q$, $\sqrt{xy} \cos \frac{R}{2} \geqslant r$ । অতএব যদি নীচের রাশি ধরি

$$x + y + z - 2\sqrt{yz} \cos \frac{P}{2} - 2\sqrt{zx} \cos \frac{Q}{2} - 2\sqrt{xy} \cos \frac{R}{2}$$

$$= \left(\sqrt{x} - \sqrt{y} \cos \frac{R}{2} - \sqrt{z} \cos \frac{Q}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{y} \sin \frac{R}{2} - \sqrt{z} \sin \frac{Q}{2}\right)^2 \geqslant 0 \text{।}$$

সুতরাং

$$x + y + z \geqslant 2\sqrt{yz} \cos \frac{P}{2} + 2\sqrt{zx} \cos \frac{Q}{2} + 2\sqrt{xy} \cos \frac{R}{2} \geqslant 2(p+q+r)$$

গ্রন্থপঞ্জী হিসাবে উপরের আলোচনাগুলির জন্য উইল্‌সন্ **[10]**, মর্‌ডেল্ **[11]** এর নাম উল্লেখ করা হল।

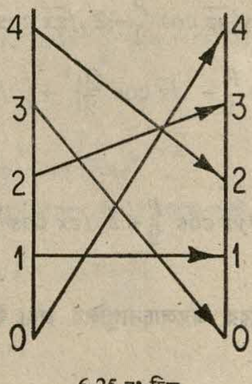
3. যথেষ্ট আগেও জ্যামিতি হতে বীজগণিতের সমাধান বা বীজগণিত হতে জ্যামিতির সমাধানের সন্ধান করা হয়েছে। উদাহরণস্বরূপ ফুরিয়ারের প্রশ্নের উল্লেখ করা হল। একটি সমতলে 17টি সরল রেখা আছে এবং তাহাদের এরূপভাবে স্থাপিত করা হল যে তাহাদের 101টি ছেদবিন্দুর কোন দুইটি বিন্দু দুইটি রেখা হতে বেশী রেখার উপর অবস্থিত নয়। অতএব আমরা নিম্নলিখিত বীজগণিতের সমীকরণ দুইটি পাই :

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_r = 17 = m \quad \dots \quad \dots \quad (6.33)$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_r^2 = 87 = m^2 - 2n = 17^2 - 2.101, \quad \cdots \quad (6.34)$$

যেখানে x_i এর অর্থ i সংখ্যক ছেদবিন্দুসহ রেখার সংখ্যা। দেখা গিয়েছে যে (1, 1, 1, 2, 4, 8) বা (1, 2, 3, 3, 8) বা (1, 5, 5, 6) বা (3, 2, 5, 7) উপরের সমীকরণ দুইটি (6.36) এবং (6.37) এর কয়েকটি সমাধান। প্রথম বা দ্বিতীয় সমাধানের ছবি আঁকা কঠিন হবে যদিও বীজগণিতের সমাধান সম্ভব হয়েছে।

3.1. বিভিন্ন মাত্রিক গণিত বীজগণিতে আজকাল আলোচনা হয় এদের যন্ত্রগণকে প্রয়োগের কারণে। আমরা দেখাব যে এখন মাত্রিক গণিত জ্যামিতিতেও প্রয়োগ সম্ভব। x মাত্রা 8 বলতে $x = 11$ হলে $x = 3$ (মাত্রা 8) লিখতে হবে বা $x = 17$ হলে আমরা পাই $x = 1$ অর্থাৎ ভাগশেষ ফাংশনের মান। এখন যদি এই মাত্রায় রেখার সমীকরণ $y = 2x + 4$ (মাত্রা 5) লিখি এবং দুইটি সমান্তরাল রেখার উপর তীর চিহ্ন দিয়ে ছবি আঁকি তবে 6.25 নং চিত্র পাব। মাত্রাকে আমরা মাপাঙ্ক বলতে পারি। ছবিটি আঁকতে $x = 1$ এ ফাংশনের মান 1 অর্থাৎ 1 হতে 1 পাওয়া

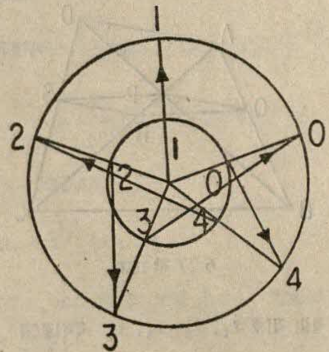


6.25 নং চিত্র

হল এটিই তীরচিহ্ন দিয়ে বুঝিয়ে দেওয়া হয়েছে। $x = 2$ ফাংশনের মান 3 যখন মাপাঙ্ক 5। অতএব 2 হতে 3 এর দিকে তীর চিহ্ন দেওয়া হয়েছে। একই মাপাঙ্কে $y = 2x + 4$ (মাপাঙ্ক 5) দুইটি এককেন্দ্রিক বৃত্তের উপর আঁকা যেতে পারে। 6.26 নং চিত্রে দ্রষ্টব্য। লক্ষ্যণীয় যে তীরচিহ্ন ছবিটির এক্ষেত্রে প্রতিসাম্য আছে। $y = 7x + 9$ (মাপাঙ্ক 9) কৌতূহলোদ্দীপক চিত্র দেবে। গ্রন্থপঞ্জীতে ওয়েবস্টার **[12]** ও বার্ড **[13]** এর নাম উল্লেখ করা হল।

4. জ্যামিতি এবং ত্রিকোণমিতির সম্বন্ধ বিশদভাবে প্রতিষ্ঠিত করতে আরও

কয়েকটি উদাহরণ নেওয়া হল। একটি ত্রিভুজে জানা আছে যে $b+c>a$। $(b+c)$ এবং a এর পার্থক্য আরও বিশদ করবার জন্য প্রমাণ করা হবে যে



6.26 নং চিত্র

$$b+c-a>\frac{2bc\cos A}{b+c} \quad \ldots \quad \ldots \quad (6.35)$$

এবং

$$b+c-a>\frac{2bc}{a} \text{ যদি } a\leqslant b \text{ বা } a\leqslant 2b। \quad \ldots \quad (6.36)$$

যদি $a\leqslant b$, তবে $b+c-a\leqslant(c+a)+c-a$ যেহেতু $c+a>b$

অতএব, $b+c-a\leqslant 2c\leqslant 2\frac{bc}{a}$

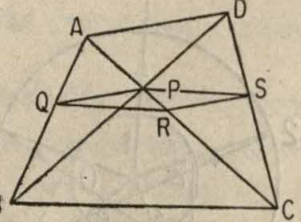
অনুরূপ $(b+c)(b+c-a)-2bc\cos A$

$$=b^2+c^2+2bc-a(b+c)-2bc\cos A$$
$$=a^2+2bc-a(b+c)$$
$$=a\left(\frac{2bc}{a}-a(b+c-a)\right)\geqslant 0।$$

অতএব $b+c-a\geqslant\frac{2bc\cos A}{b+c}$

4.1. এবার জ্যামিতির ছবি এঁকে কি করে জ্যামিতির অসমতা নির্ণয় করা যায় তা দেখান হবে। ধরা যাক $ABCD$ একটি উত্তল চতুর্ভুজ এবং এর AD বাহু BC বাহুর সমান্তরাল নহে। P বিন্দু কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু। Q, AD এর সমান্তরাল। QR কে BC বাহুর সমান্তরাল এবং RS কে AD বাহুর সমান্তরাল করে টানা

হয়েছে। 6·27 নং চিত্র দ্রষ্টব্য। স্পষ্টতঃই $PQRS$ একটি সামন্তরিক। ধরা যাক $s_0 = PQRS$ সামন্তরিকের ক্ষেত্রফল ; $s_0 = ABCD$ চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল। প্রমাণিত



6.27 নং চিত্র

হবে যে $s_0<\frac{8}{27}s$। ধরা যাক s_1, s_2, s_3, s_4 যথাক্রমে PAB, PBC, PCD এবং PDA ত্রিভুজগুলির ক্ষেত্রফল। যেহেতু PQ, AD বাহুর সমান্তরাল

$$\frac{AQ}{AB}=\frac{DP}{BD}=\frac{s_4}{s_1+s_4} \qquad \cdots \qquad \cdots \quad (6·37)$$

(6·37) এর ডানদিক A বিন্দু হতে BD এর উপর লম্ব টানলেই পরিষ্কার ভাবে পাওয়া যাবে। যেহেতু,

$$\frac{s_4}{s_1}=\frac{s_3}{s_2}, \qquad \cdots \qquad \cdots \quad (6·38)$$

আমরা (6·37), (6·38) হতে পাই—

$$\frac{s_4}{s_1+s_4}=\frac{s_3}{s_2+s_3}=\frac{s_3+s_4}{s_1+s_2+s_3+s_4}$$

অর্থাৎ,

$$\frac{AQ}{AB}=\frac{s_3+s_4}{s_1+s_2+s_3+s_4} \qquad \cdots \qquad \cdots \quad (6·39)$$

অতএব PAQ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= s_1\frac{s_3+s_4}{s_1+s_2+s_3+s_4}$ $\cdots$ (6·40)

(6.40) P বিন্দু হতে AB এর উপর লম্ব টানলেই পাওয়া যায়। অনুরূপভাবে AQR ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $=(s_1+s_2)\left(\frac{s_3+s_4}{s_1+s_2+s_3+s_4}\right)^2$, $\cdots$ (6·41)

কারণ সদৃশ ত্রিভুজদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের অনুপাত অনুরূপ বাহুদ্বয়ের বর্গের অনুপাতের সমান। (6.41) এবং (6.40) হতে PQR ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল =

$$(s_3-s_1)\ \frac{(s_1+s_2)\ (s_3+s_4)}{(s_1+s_2+s_3+s_4)^2}\text{।} \qquad \cdots \quad (6·42)$$

যেহেতু, $s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = s$, $s_1 s_3 = s_2 s_4$ আমরা পাই

$$s_3 = \frac{(s - s_1 - s_2)s_2}{s_1 + s_2} \text{ ।} \quad \ldots \quad \ldots \quad (6.43)$$

(6.43) এবং (6.42) হতে

$$PQR \text{ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{s^2}\left(ss_2 - (s_1 + s_2)^2\right)(s_3 + s_4)$$

$$= \frac{1}{s^2}\left(ss_2 - (s_1 + s_2)^2\right)(s - s_1 - s_2) \text{ ।} \quad (6.44)$$

ধরা যাক $x = s_1 + s_2$ । অতএব,

$$s_0 = \frac{2}{s^2}\left|ss_2 - x^2\right|(s - x) \quad \ldots \quad \ldots \quad (6.45)$$

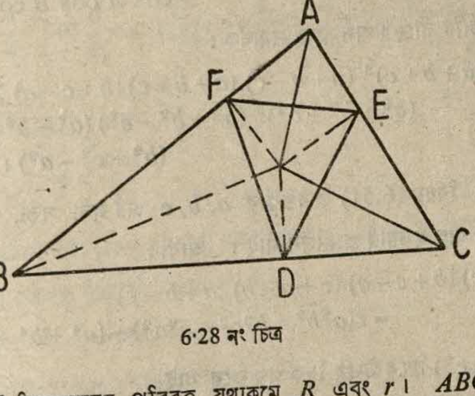
s_2 এর মান শূন্য ধরলেও s_0 এর বৃহত্তম মান $\frac{8}{27}s$ । অতএব

$$s_0 < \frac{8}{27}s \text{ ।}$$

4.2. এবার বিপরীত দিকের প্রশ্ন নিয়ে আলোচনা করব অর্থাৎ যদি অসমতাটি দেওয়া থাকে তবে তার জ্যামিতিক ব্যাখ্যা কি হতে পারে। ধরা যাক একটি ত্রিভুজ ABC তে দেওয়া আছে যে

$$R(\cos A + \cos B + \cos C) = R + r \quad \ldots \quad (6.46)$$

যেখানে R পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ এবং r অন্তঃবৃত্তের ব্যাসার্ধ। 6.28 নং চিত্র দ্রষ্টব্য।



6·28 নং চিত্র

ARC, DEF ত্রিভুজদ্বয়ের পরিবৃত্ত যথাক্রমে R এবং r। ABC, DEF এর পরিসীমা যথাক্রমে $p(ABC)$, $p(DEF)$ দিয়ে নির্দেশিত করা হল। অতএব

$$p(ABC) : p(DEF) = R : r \text{ ।} \quad \ldots \quad \ldots \quad (6.47)$$

সুতরাং প্রশ্নের শর্ত অনুসারে

$$p(ABC)(\cos A+\cos B+\cos C)=p(ABC)+p(DEF)$$

অর্থাৎ

$$(a+b+c)(\cos A+\cos B+\cos C)=(a+b+c)+(DE+EF+FD)$$

বা $$(a\cos A+b\cos B+c\cos C)+(BF+BD)+(DC+CE)+(AE+AF)=(a+b+c)+(DE+EF+FD) \quad \dots \quad (6.48)$$

কিন্তু

$$a\cos A=R\sin 2A \text{ এবং } \frac{EF}{\sin A}=\frac{b\cos A}{\sin B} \text{ অর্থাৎ } EF=R\sin 2A$$

অনুরূপ $b\cos B$, $c\cos C$ পাই। কাজেই (6.48) হতে পাওয়া যায়

$$(DF+FB+BD)+(ED+DC+CE)+(FE+EA+AF)=(BC+CA+AB)+(DE+DF+FE) \text{।} \quad \dots \quad (6.49)$$

(6.49) হয়েছে (6.46) এর জ্যামিতিক ব্যাখ্যা।

4.3. আরও কিছু জ্যামিতি ও ত্রিকোণমিতির অপরিচিত অসমতা দিয়ে এ পরিচ্ছেদ শেষ হবে। আমরা একটু কঠিন অসমতা বিবৃত করলাম। যদি A, B, C, a, b, c, s, ABC ত্রিভুজের কোণগুলি, বাহুগুলির দৈর্ঘ্য, অর্ধপরিসীমা হয়, তবে

$$(a+b+c)^3(s-a)(s-b)(s-c)\geqslant(a^2+b^2+c^2)^3\cos A\cos B\cos C \text{।} \quad (6.50)$$

(6.50) অসমতাটি নীচের অসমতার সমার্থক :

$$(abc)^2(a+b+c)^3(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)\geqslant(a^2+b^2+c^2)^3(a^2+b^2-c^2)(a^2-b^2+c^2)(b^2+c^2-a^2) \text{।} \quad \dots \quad (6.51)$$

কিন্তু আশ্চর্যের বিষয় (6.51) সর্বপ্রকার a, b, c এর জন্য সত্য, অর্থাৎ a, b, c ত্রিভুজের তিনটি বাহু হওয়ার প্রয়োজন নাই। আবার

$$(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)-=2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4) \quad (6.52).$$

কে $(a^2+b^2+c^2)$ দিয়ে উভয় দিক গুণ করে পাই

$$(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)=(a^4b^2+b^4a^2+b^4c^2+c^4b^2+a^4c^2+c^4a^2)-(a^6+b^6+c^6)+6a^2b^2c^2$$

$$=(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)+8(abc)^2 \quad ...(6.53)$$

পুনরায়

$$abc\,(a+b+c)=a^2bc+b^2ca+c^2ab \leqslant (a^2+b^2+c^2)^2 \quad ...(6.54)$$

(6.53) এবং (6.54) প্রয়োগ করে অনায়াসেই (6.51) অসমতাটি পাওয়া যায়। ত্রিভুজের নানারূপ অসমতা বিষয়ে গ্রন্থপঞ্জীতে কাল্ ্যান্ [14] হাস্তোরি [15] নেভিল্ [16], বোত্তেমা [17], বাগের [18], ব্রাওন্ [19] কারলিৎস্ [20] এর নাম উল্লেখ করা হল। বোত্তেমাই বিশেষভাবে উল্লেখযোগ্য।

4.4. ত্রিভুজের সহিত যুক্ত অপর একটি অসমতার আলোচনা করব যার চরিত্র পূর্বের আলোচনা হতে কিছুটা পৃথক। আমাদের সেই ত্রিভুজগুলির স্বরূপ নির্ণয় করতে হবে যেগুলি নীচের অসমতাটি মান্য করে—

$$\sqrt{3}+5(\cot A+\cot B+\cot C) \geqslant 3(\operatorname{cosec} A+\operatorname{cosec} B+\operatorname{cosec} C)\,।$$

যদি ত্রিভুজটি সমবাহু হয় তবে স্পষ্টতঃই অসমতার পরিবর্তে সমতাটি হবে। প্রমাণ করার জন্য আমাদের লক্ষ্য করতে হবে

$$2\cot A=\cot\frac{A}{2}-\tan\frac{A}{2} \text{ এবং } 2\operatorname{cosec} A=\cot\frac{A}{2}+\tan\frac{A}{2}\,। \quad ... \quad (6.56)$$

(6.55) এবং (6.56) হতে পাই

$$\sqrt{3}+\left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right) \geqslant 4\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)\,। \quad ... \quad (6.57)$$

(6.57)কে লেখা যেতে পারে

$$\sqrt{3}+\frac{s}{r} \geqslant 4\,\frac{(4R+r)}{s} \quad ... \quad ... \quad ... \quad (6.58)$$

যখন R, r, s যথাক্রমে পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ, অন্তঃবৃত্তের ব্যাসার্ধ এবং ত্রিভূজের অর্ধ-পরিসীমা। কিন্তু যেহেতু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $F=rs$,

$$F\sqrt{3}+s^2 \geqslant 4r(4R+r)\,। \quad ... \quad ... \quad (6.59)$$

কিন্তু $\quad F\sqrt{3} \geqslant 9r^2$ এবং $s^2 \geqslant 16Rr-5r^2 \quad ... \quad ... \quad (6.60)$

সকল ত্রিভুজের পক্ষেই প্রযোজ্য এবং যদি ত্রিভুজটি সমবাহু হয় (6.60) তে সমতা চিহ্ন হবে।

বিকল্পে,

$$\cot A+\cot B+\cot C=\frac{a^2+b^2+c^2}{4F} \text{ এবং } \operatorname{cosec} A+\operatorname{cosec} B$$

$$+\operatorname{cosec} C=\frac{ab+bc+ca}{2F} \text{।} \quad \ldots \quad (6.61)$$

যদি $Q=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$ বলে ধরা হয়, (6.59) এর অসমতাটি দাঁড়ায়—

$$4F\sqrt{3}+3Q \geqslant (a^2+b^2+c^2) \text{।} \quad \ldots \quad \ldots \quad (6.62)$$

(6.62) সকল ত্রিভুজের পক্ষেই প্রযোজ্য এবং সমতা চিহ্ন সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রে সত্য।

9.5. আমরা এবার আরও একটু ভিন্নধরনের ত্রিভুজের অসমতার আলোচনা করব। সমবাহু ভিন্ন ত্রিভুজের যদি পরিকেন্দ্র O, অন্তঃকেন্দ্র I, লম্ববিন্দু H হয় এবং যদি ত্রিভুজের কোণ তিনটির মাপ α, β, γ হয় এবং $\alpha<\beta<\gamma$ হয়, তবে প্রমাণিত হবে যে,

(i) $1<\frac{HO}{IO}<3$ ও $0<\frac{HI}{HO}<\frac{2}{3}$ ... ... (6.63)

(ii) $0<\frac{HI}{HO}<1$ যদি $\beta>60°$, $HI=IO$ যদি $\beta=60°$, (6.64)

$1<\frac{HI}{IO}<2$ যদি $\beta<60°$।

প্রমাণের জন্য নীচের সম্বন্ধগুলির সদ্ব্যবহার করা হবে :

(a) $IO^2=R^2-2Rr$,
(b) $HO^2=9R^2+8Rr+2r^2-2s^2$,
(c) $HI^2=4R^2+4Rr+3r^2-s^2$,
(d) $R>2r$,
(e) $16Rr-5r^2<s^2<4R^2+4Rr+3r^2$,
(f) $s>,=,<\frac{R+r}{\sqrt{3}}$. যখন $\beta>,=,<\frac{\pi}{3}$।

... (6.65)

(6.65) এর (b) এবং (e) হতে পাওয়া যায়

$$R^2-4r^2<HO^2<9R^2+24Rr+12r^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad (6.66)$$

(6.66) কে আগাগোড়া R^2-2Rr দিয়ে ভাগ করে এবং (a) কে ব্যবহার করে ও বর্গমূল নিয়ে পাই

$$\left(1+\frac{2r}{R}\right)^{\frac{1}{2}} < \frac{HI}{IO} < \left(9-\frac{6r}{R}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \ldots \quad \ldots \quad (6.67)$$

অর্থাৎ $1 < \dfrac{HI}{IO} < 3$ । অতএব (6.63(i)) এর প্রথমাংশ প্রমাণিত হল । পুনরায় (6.66) এর (b) ও (c) ব্যবহার করে পাই যদি (6.63) এর দ্বিতীয় অসমতাকে সত্য বলে ধরে নেওয়া যায় অর্থাৎ $\dfrac{HI^2}{HO^2} < \dfrac{4}{9}$, তবে,

$$s^2 > 4Rr + 19r^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (6.68)$$

(6.68) এর সত্যতা প্রমাণিত হবে (6.65 (d)) এবং (6.65 (e)) এর প্রথমাংশ হতে ।

(6.64) প্রমাণিত করতে হলে

$$\frac{HI}{HO} < \frac{2}{3} \text{ এর ফলে } 3HI < 2HO \leqslant 2(HO+HI)$$

অর্থাৎ $\dfrac{HI}{IO} < \dfrac{2}{3} < 1$ । এখন (6.65 (b), (c)) হতে পাই

$$HI^2 <, =, > 1 \text{ যখন } \beta >, =, < \frac{\pi}{3} ।$$

প্রশ্নমালা

1. একটি রেখার উপর অপর একটি রেখার লম্ব অভিক্ষেপ এঁকে প্রমাণ কর যে $\dfrac{b^2+c^2}{2} \geqslant bc$ ।

2. রেখাচিত্র সাহায্যে সত্যতা দেখাও যে C_6H_{14} এবং C_7H_{16} অঙ্গারাত্মক যৌগিক পদার্থ দুইটির রূপান্তরের সংখ্যা যথাক্রমে 5 এবং 10 ।

3. দিক নির্দেশিত বৃত্তের সম্বন্ধে ছয় বৃত্তের উপপাদ্যের প্রমাণ উপস্থিত কর ।

4. রেখাচিত্র এঁকে দেখাও যে মিথেন, ইথেন এবং প্রোপেন কোনরূপ রূপান্তর দেয় না ।

5. রেখাচিত্রের সাহায্যে দেখাও যে ল্যাকটিক এ্যাসিড :

$CH_3CH(OH)COOH$, ভ্যালেরিক এ্যাসিড্ : $\begin{matrix} CH_3 \\ C_2H_5 \end{matrix}\!\!>\! CH \cdot COOH$ এবং

এ্যামাইল্ এ্যালকোহল : $\begin{matrix} CH_3 \\ C_2H_5 \end{matrix}\!\!>\! CH \cdot CH_2OH$ এর ন্যায় সরল অঙ্গারাত্মক যৌগিক রাসায়নিক পদার্থ সকলের, বামাবর্তক, দক্ষিণাবর্তক এবং বাম ও দক্ষিণাবর্তক রূপের দৃষ্টি বিষয়ক রূপান্তর আছে।

6. দেখাও যে ম্যালেয়িক্ এ্যাসিড

$$\begin{matrix} H-C-COOH \\ \| \\ H-C-COOH \end{matrix}$$

এবং ফিউমারিক এ্যাসিড্

$$\begin{matrix} H-C-COOH \\ \| \\ HOOC-C-H \end{matrix}$$

দুইটি 'সমঅণু-সমদিক' এবং 'সমঅণু বিপরীত দিক' জ্যামিতিক পদার্থের রূপান্তর এবং

$$\begin{matrix} CH_3-C-H \\ \| \\ CH_3-C-H \end{matrix}$$

'2-বুটিন সমঅণু সমদিক' ও

$$\begin{matrix} CH_3-C-H \\ \| \\ H-C-CH_3 \end{matrix}$$

'2-বুটিন সমঅণুবিপরীত দিক' জ্যামিতির রূপান্তর।

7. দেখাও যে ডাই-ইথাইল্-ইথার : $C_2H_5-O-C_2H_5$ এবং বুটাইল্-এ্যালকোহল্ : C_4H_9-OH দুইটি 'গঠনতাত্ত্বিক রূপান্তর'।

8. এরডস্-মরডেল্ উপপাদ্য যে, যে কোন ত্রিভুজে $x+y+z=2(p+q+r)$ প্রমাণ কর যেখানে x, y, z, p, q, r যথাক্রমে কোন অন্তঃস্থ বিন্দুর শীর্ষ বিন্দুগুলির দূরত্ব এবং বিন্দুতে উৎপন্ন কোণগুলির সমদ্বিখণ্ডকগুলির দৈর্ঘ্য।

9. $y=7x+4$ (মাপাঙ্ক 8), $y=9x+3$ (মাপাঙ্ক 10) এবং $9x+3$ (মাপাঙ্ক 10) এর তীর চিহ্নযুক্ত চিত্র আঁক।

10. যদি a, b, c ত্রিভুজের তিনটি বাহু হয়, প্রমাণ কর যে

$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \leqslant k\,abc$ যখন $k=2$।

11. ধরা যাক P বিন্দু ABC ত্রিভুজের অন্তঃস্থ। α, β, γ, ABC ত্রিভুজের কোণ। ধরা যাক R_1, R_2, R_3 P বিন্দুর ABC ত্রিভুজের শীর্ষ বিন্দুগুলির দূরত্ব। r_1, r_2, r_3 P বিন্দুর ABC ত্রিভুজের বাহুগুলি হতে দূরত্ব। দেখাও যে

$$R_1^2 \sin^2 \alpha + R_2^2 \sin^2 \beta + R_3^2 \sin^2 \gamma \leqslant 3(r_1^2+r_2^2+r_3^2)\text{।}$$

12. ধরা যাক P, ABC ত্রিভুজের অন্তঃস্থ বিন্দু। ধরা যাক R_1, R_2, R_3 P বিন্দুর ABC ত্রিভুজের বাহুগুলি হতে দূরত্ব। প্রমাণ কর যে

(i) $R_1(r_2+r_3)+R_2(r_1+r_3)+R_3(r_1+r_2) \geqslant (r_1+r_2)(r_1+r_3)$,

(ii) $$(R_1+R_2)(R_1+R_3)+(R_2+R_1)(R_2+R_3)+(R_3+R_1)(R_3+R_2) \geqslant 4\{(r_1+r_2)(r_1+r_3)+(r_2+r_1)(r_2+r_3)+(r_3+r_1)(r_3+r_2)\}$$

সমতাচিহ্ন সত্য হবে যদি ABC সমবাহু ত্রিভুজ হয় এবং P ত্রিভুজের কেন্দ্রে অবস্থিত হয়।

In the Germany at the turn of century there was keen interest in the inter-relationship of research and education. Felix Klein, Courant's predecessor at Göttingen, was a leader in the then developing interest in school Mathematics. Courant was deeply concerned that Mathematical text-books not only be logically disciplined, but that they also reveal motivations and usefulness. He had moreover the ability to meet these criteria and at the same time produce writing which had elegance and beauty—books which were infact works of art.

—Warren Weaver.

1. পোডো, ডি.—[1] 25 (1941) পৃঃ 224-225।
2. — —[1] 25 (1941) পৃঃ 310-311।
3. — —[2] 77 (1970) পৃঃ 711-720।
4. ডিউডনে, জে.—Linear Algebra and Geometry, হারম্যান (প্যারিস), (1964)
5. জাগলস্, এ.—Complex numbers in Geometry, এ্যাকাডেমিক প্রেস, নিউইয়র্ক (1968)
6. বাউসর্, জে—ম্যাথ্‌মেটিক্স টিচিং, 68 (1974) পৃঃ 32-41।
7. কোয়াডলিং, ডি. ও মরিস্, ডি. এম্—[1] 63 (1979) পৃঃ 233-241।
8. পাওয়েল, ডি. এল.—[1] 59 (1975) পৃঃ 272-273।

9. শোয়েনল্যাণ্ড, এ.—Molecular symmetry, an introduction to group theory and its uses in chemistry, ভ্যান নষ্ট্র্যাণ্ড্ (1965)

10. উইলসন্, ডব্লিউ.—[1] 55 (1971) পৃঃ 68-70।

11. মরডেল্, এল্. জে.—[1] 46 (1962) পৃঃ 213-215।

12. ওয়েব্স্টার, আর্. জে—[1] 64 (1980) পৃঃ 270-271।

13. বার্ড, এম্. এইচ্.—[1] 64 (1980) পৃ: 78-85।

14. কাল্ম্যান্, জে. এ.—[1] 47 (1963) পৃঃ 224-225।

15. হাস্তোরি, ওয়াই.—[1] 47 (1963) পৃঃ 148-150।

16. নেভিল্, ই. এইচ্.—[1] 43 (1955) পৃঃ 187-188।

17. বোত্তেমা, ও.—Geometric inequalities, নুর্ডহফ্, গ্রনিংগেন (1969)

18. বাগের, এ.—[2] 79 (1972) পৃঃ 1040-1041।

19. ব্রাওন্, ডব্লিউ. জে.—[2] 79 (1972) পৃঃ 397-398।

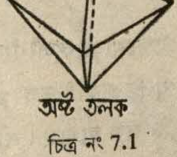
20. কার্লিৎস্. এল্.—[2] 79 (1972) পৃঃ 203, পৃঃ 304।

সপ্তম পরিচ্ছেদ

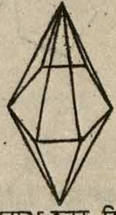
সরল ঘনবস্তু এবং সৌন্দর্যময় বহুতলক ও তাদের নানাপ্রকার ছেদ।

1. আলোচ্য বহুতলকগুলি ঘনবস্তুর সবচেয়ে সহজ উদাহরণ, হয়ত গোলাকার ঘনবস্তু ছাড়া। দুইটি তলের সাধারণ বাহুকে ধার বলা হবে। সর্বাপেক্ষা পরিচিত বহুতলকের উদাহরণ পিরামিড এবং প্রিজ্‌ম্। আমরা বহুক্ষেত্রেই সুষম সরল প্রিজ্‌ম্ এবং পিরামিড্ নিয়েই আলোচনা করব। একটি তলের উপর সাধারণতঃ যে ছবি ফুটে ওঠে ধারগুলি দিয়ে তা প্রায়শঃই সুষম বহুভুজ হয়। প্রিজ্‌ম্‌গুলি দেয় সুষম বহুভুজ এবং সেগুলি আয়তক্ষেত্র দিয়ে যুক্ত থাকে। আয়তক্ষেত্রগুলি সময় সময় বর্গক্ষেত্রে পরিণত হয়। যদি প্রিজ্‌মের সবগুলি তলই একইরূপ হয় তবে প্রিজ্‌ম্‌কে ঘনসুষম বলা যাবে। যখন বহুভুজটি চারবাহুবিশিষ্ট তখন প্রিজ্‌ম্‌টিকে ঘনক বলা হয়।

ত্রিভুজাকার পিরামিড্‌কে চতুস্তলক বলা হয়। যদি এর চারটি তলই সমবাহু ত্রিভুজ হয় তবে একে সুষম চতুস্তলক বলা হবে। বহুভুজের উপর অবস্থিত প্রিজ্‌ম্‌কে সামান্য পরিবর্তিত করলে পর 'বিপরীতপ্রিজ্‌ম্' বা 'প্রিজম্ নির্মিত ঘনতলক' বলা হবে। ইহার তলগুলিতে দুইটি সুষম n-ভুজ আছে বা যুক্ত আছে এবং ইহার বাহুগুলি $2n$ সংখ্যক ত্রিভুজ দিয়ে দুইটি শীর্ষে যুক্ত আছে। এই ত্রিভুজগুলি সাধারণতঃ সমদ্বিবাহু হয়। তবে সমদ্বিবাহু ত্রিভুজগুলি সমবাহু করে নেওয়া যেতে পারে যদি ত্রিভুজগুলির উচ্চতা সীমিত করা যায়। যখন $n = 4$, বিপরীত প্রিজ্‌ম্ অষ্টতলকে (7.1 চিত্র) পরিণত



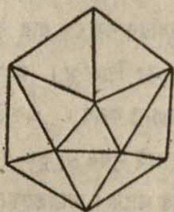
চিত্র নং 7.1



চিত্র নং 7.2

হয়। যখন $n = 6$ হয় 7.2 চিত্রের ন্যায় হয়। যখন $n = 5$, যে চিত্র পাওয়া যায় তা দুইটি পঞ্চভুজ পিরামিড্‌কে একত্র করে পঞ্চভুজে জুড়ে দিলে বিংশতিতলক

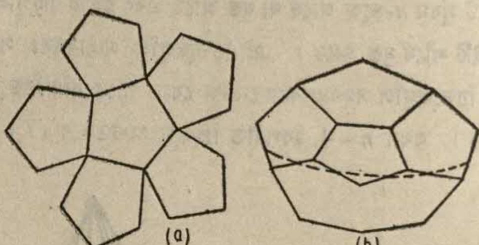
পাওয়া যাবে 7.3 নং চিত্র দ্রষ্টব্য। প্রত্যেকটি শীর্ষ বিন্দুতেই পঞ্চভুজ সৃষ্টি হয়েছে এবং প্রত্যেকটি তলই ত্রিভুজ। সুষম দ্বাদশ-তলক তৈরী করতে হলে দুইটি কড়াইয়ের আকৃতির পাত্রকে খাঁজে খাঁজে বসিয়ে জুড়তে হবে। দুইটি কড়াইয়েরই আকৃতি



বিপরীত প্রিজম্: বিংশতি তলক

চিত্র নং 7.3

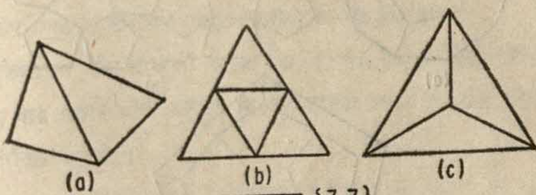
এরূপ যে একটি পঞ্চভুজের পাঁচ ধারেই একইরূপ সমাকৃতি পঞ্চভুজ ঘিরে রেখেছে। এজন্য 7.4 চিত্র দ্রষ্টব্য।



7.4 নং চিত্র

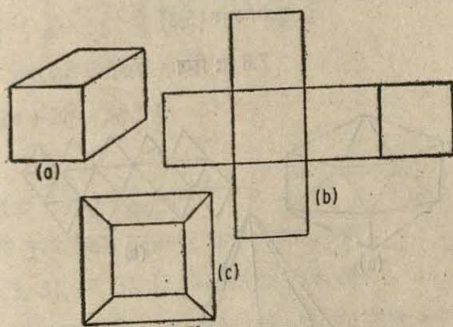
প্রত্যেকটি বহুতলককে নির্দিষ্ট করবার উদ্দেশ্যে শ্লাফ্লী চিহ্ন $\{p, q\}$ ব্যবহার করা হয়। $\{p, q\}$ চিহ্নের এক্ষেত্রে অর্থ যে প্রত্যেকটি তল p-ভুজাকৃতি বিশিষ্ট এবং সমবাহু এবং q-বাহু একটি শীর্ষবিন্দুতে মিলিত হয়েছে। শীর্ষবিন্দুগুলির সংখ্যা, ধারের বা কিনারার সংখ্যা এবং তলের সংখ্যাকে সাধারণতঃ V, E এবং F দিয়ে নির্দেশিত হয়। লিওনার্দো দ্য ভিঞ্চি কাঠের টুকরা দিয়ে বহুতলকের মডেল তৈরী করেছেন। মডেলগুলিতে ধারগুলি পরিস্ফুট, কিন্তু তলগুলি কিরূপে অবস্থিত হবে তা

দ্রষ্টার কল্পনায় ছেড়ে দেওয়া হয়েছে। 7.5, 7.6, 7.7, 7.8 এবং 7.9 নং চিত্র শ্লাফ্‌লীর সাঙ্কেতিক চিহ্ন দিয়ে বহুতলক নির্দেশ করা বুঝবার জন্য দ্রষ্টব্য।



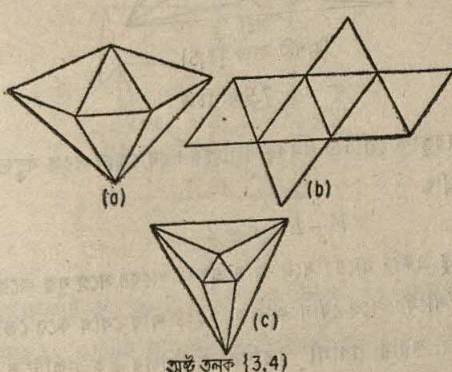
চতুস্তলক {3,3}

7.5 নং চিত্র



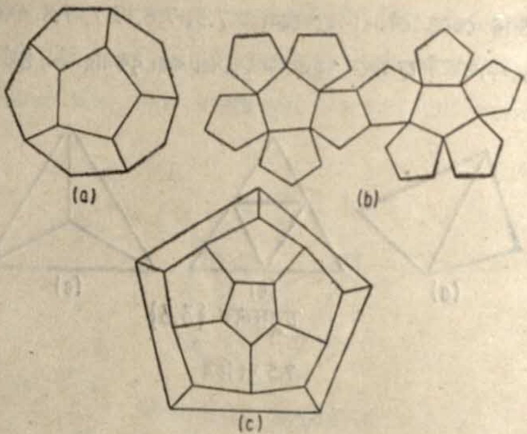
ঘনক {4,3}

7.6 নং চিত্র



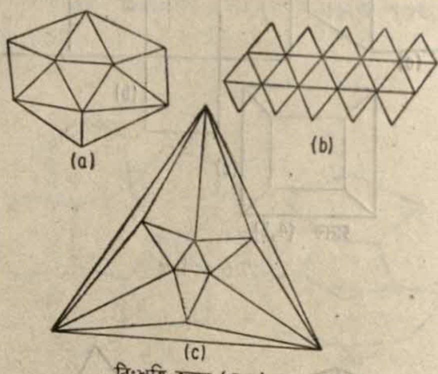
অষ্ট তলক {3,4}

7.7 নং চিত্র



দ্বাদশ তলক $\{5,3\}$

7.8 নং চিত্র



বিংশতি তলক $\{3,5\}$

7.9 নং চিত্র

উপরের চারটি ঘনবস্তুকে প্লেটোর ঘনবস্তু বলা হয়। যে কোন সরল বহুতলক অয়েলারের সূত্র মান্য করে অর্থাৎ,

$$V-E+F=2 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (7.1)$$

যে কোন যুক্ত ঘনবস্তু একটি ধারের সঙ্গে আর একটি ধারের সঙ্গে যুক্ত করে, একটি শীর্ষের সঙ্গে অপর একটি শীর্ষের সঙ্গে যোগ করে বা দুইটি শীর্ষ যোগ করে তৈরী করে নেওয়া যেতে পারে। তৈরী করার প্রণালী উপরের ছবিগুলির এক একটিতে দেওয়া আছে। পূর্বের ক্ষেত্রে V, E এর প্রত্যেকেই 1 করে বর্ধিত হবে এবং F অপরিবর্তিত থাকবে।

পরের ক্ষেত্রে V অপরিবর্তিত থাকবে। পরের ক্ষেত্রে V অপরিবর্তিত থাকে এবং E, F উভয়েই সংখ্যায় 1 বর্ধিত হয়। উভয় ক্ষেত্রেই—

$$V-E+F=2$$

অতএব সরলভাবে যুক্ত বহুতলকের ক্ষেত্রে অয়েলারের সূত্র প্রযোজ্য।

সুষম বহুতলকের যদি শ্লাফ্লী সংজ্ঞা $\{p, q\}$ হয়, p, q নীচের সম্বন্ধগুলি মান্য করে যেহেতু q ধার একটি শীর্ষ বিন্দুতে মিলিত হয়েছে এবং p ধার একটি তলের পরিসীমা নির্ধারিত করেছে :

$$qV=pF=2\,(\text{ধারগুলির সংখ্যা})=2E \qquad \ldots \quad (7,2)$$

অতএব,

$$\frac{V}{\frac{1}{q}}=\frac{E}{\frac{1}{2}}=\frac{F}{\frac{1}{p}}=\frac{V-E+F}{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}+\frac{1}{p}}=\frac{2}{\frac{1}{q}+\frac{1}{y}-\frac{1}{2}}=\frac{4pq}{2p+2q-pq} \quad \ldots (7.3)$$

যেহেতু V, E, F সকলেই ধনাত্মক সংখ্যা হবে.

$$2p+2q-pq>0$$

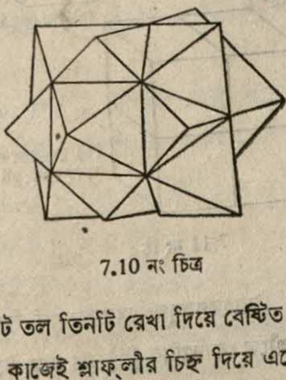
বা

$$(p-2)(q-2)<4 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (7.4)$$

কাজেই মাত্র পাঁচটি সুষম উত্তল বহুতলক পাওয়া সম্ভব, যথা

$$\{3, 3\}, \{4, 3\}, \{3, 4\}, \{5, 3\}, \{3, 5\} \qquad \ldots \qquad (7.5)$$

1.1 $\{p, q\}$ বহুতলকের বিপরীত হবে $\{q, p\}$ এবং এর প্রতিবর্তও সত্য। 7.10 নং চিত্র ঘনকের বিপরীত বহুতলক বা বিপরীত ঘনক।

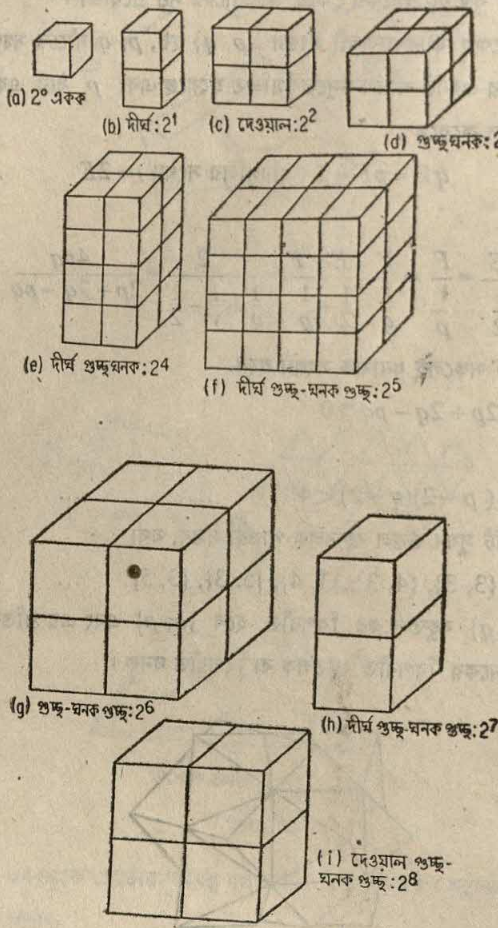


7.10 নং চিত্র

এই বহুতলকের প্রত্যেকটি তল তিনটি রেখা দিয়ে বেষ্টিত এবং প্রতেকটি শীর্ষে চারটি রেখা মিলিত হয়েছে। কাজেই শ্লাফ্লীর চিহ্ন দিয়ে একে $\{3, 4\}$ বলতে হবে।

1.2 আমরা এখন সবচেয়ে সরল ঘনবস্তুর আকৃতি যেগুলিকে ডিয়েনের ঘনক

বলা হয় সেগুলির আলোচনা করব। এমন কি এমন সহজ বস্তুর আকৃতির মাধ্যমেও গুণবার প্রণালী এবং ঘাতচিহ্নের উপযোগিতা ও গুরুত্ব বুঝিয়ে দেওয়ার যথেষ্ট সুযোগ রয়েছে। 7.11 নং চিত্রগুলি দ্রষ্টব্য। আমাদের নানা মানের ঘাত ছবি দিয়ে ডিয়েনের



7.11 নং চিত্র

ঘনকের সাহায্যে আঁকা সম্ভব। উদাহরণস্বরূপ ত্রিঘাতের বর্গ, ত্রিঘাতের ত্রিঘাত ইত্যাদি দেখিয়ে দেওয়া সম্ভব। গ্রন্থপঞ্জীতে কোক্সিটার [1] এর নাম উল্লেখ করা হল।

1.3 আমরা $F-E+V=2$ সূত্রটি সরলভাবে যুক্ত বহুতলকের ক্ষেত্রে প্রমাণিত

করেছি। ধরা যাক, কোন বহুতলকের প্রত্যেকটি শীর্ষ বিন্দুতে অন্ততঃ তিনটি ধার এসে মিলেছে এবং এর প্রত্যেকটি তলের পরিসীমায় অন্ততঃ তিনটি রেখা আছে। প্রত্যেকটি তলে যদি k সংখ্যক ধার থাকে, তবে ঐ তলে k সংখ্যক শীর্ষ থাকবে।

উপপাদ্য ঃ সরলভাবে যুক্ত বহুতলকের ক্ষেত্রে k এর মান কেবলমাত্র 3, 4, 5 হতে পারে।

k এর মান 1 বা 2 এর প্রশ্ন আসে না। এখন প্রমাণিতব্য মাত্র যে $k \geqslant 6$ সম্ভবপর নয়। আমরা অয়েলারের সূত্র হতে পাই যে,

$$F - E + V = 2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (7.6)$$

এবং স্পষ্টতই

$$kF = 2E,\ V = V_3 + V_4 + V_5 + \ldots \cdots \quad \ldots \quad (7.7)$$

এবং

$$2E = 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + \cdots, \quad \ldots \quad \ldots \quad (7.8)$$

যেখানে F, E, V এবং V_r যথাক্রমে বহুতলকে তলের সংখ্যা, ধারের সংখ্যা, শীর্ষবিন্দুর সংখ্যা এবং যে শীর্ষবিন্দুতে r সংখ্যক রেখা মিলিত হয়েছে তার সংখ্যা। (7.7) সমীকরণটি অনায়াসেই বুঝা যায়। (7.8) সমীকরণটি বুঝতেও অসুবিধা হয় না কারণ শীর্ষবিন্দুর বর্গমান 3, 4, 5, ··· ইত্যাদি হতে পারে (7.6), (7.7) এবং (7.8) হতে F অপনয়ন করে পাওয়া যায়

$$4k = 2kV - 2(k-2)E = (6-k)V_3 + (8-2k)V_4 + (10-3k)V_5 + \cdots \quad \ldots \quad (7.9)$$

লক্ষ্যণীয় যে, (7.9) এর ডানদিক ধনাত্মক হতে হলে $k < 6$। কাজেই F এর সম্ভাব্য মান বিভিন্ন k এর মানের জন্য পাওয়া যায় যে,

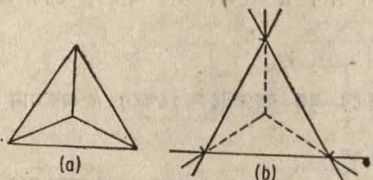
(i) $k = 3,\ F = 4, 6, 8, 10, 12, 14 \cdots \quad \cdots \quad \ldots \quad (7.10)$

(ii) $k = 4,\ F = 6, 8, 9, 10, 11 \cdots \quad \ldots \quad \ldots \quad (7.11)$

(iii) $k = 5,\ F = 12, 16, 18, 20, 22, \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (7.12)$

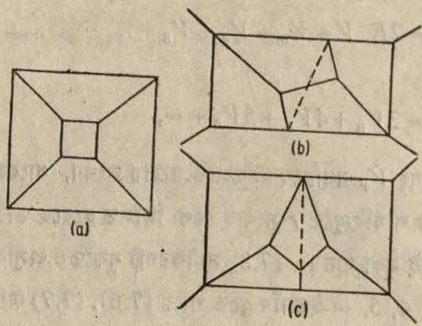
উপরের 7.10 এর সামান্য বিশদ আলোচনা দেওয়া সমীচীন হবে। যেহেতু $k = 3$, তলগুলি ত্রিভুজাকৃতি হবে। একটি চতুস্তলকে $k = 3$, $F = 4$। স্পষ্টতঃই দেখা যায় যে এর কোন একটি তলকে অপনয়ন করে আরও তিনটি ত্রিভুজাকৃতি তল যুক্ত করে

দেওয়া যায়। কাজেই যখন $k=3$, Fএর মান 4 হতে দুই করে বর্ধিত হয়ে নতুন নতুন তলকের সৃষ্টি হবে। 7.12 নং চিত্র দ্রষ্টব্য ঃ



7.12 নং চিত্র

(7.11) এর এখন একটু বিশদ আলোচনা করব। যেহেতু $k=4$, এরূপ বহুতলকের তলের পরিসীমা চারটি রেখা দিয়ে বেষ্টিত। 7.13 নং চিত্র দ্রষ্টব্য ঃ



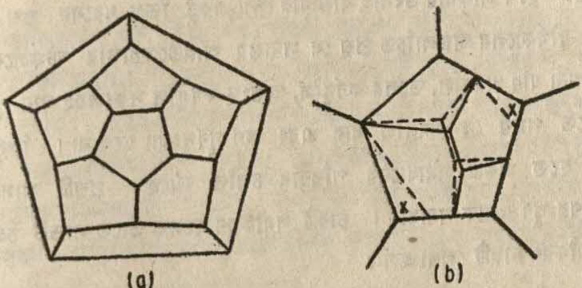
7.13 নং চিত্র

7.13(a) এর যে কোন তলকে 7.13(b) বা 7.13(c) চিত্রের ন্যায় চারটি তল দিয়ে অপসারিত করা যায়। লক্ষণীয় যে এরূপ অপসারণের ফলে বহুতলকের চরিত্রের কোন রূপান্তর ঘটছে না। অনুরূপ কারণে একটি তলকে তিন ভাঁজ চিন্তা করে দুইটি তলের যোগ চিন্তা করতে পারি। কাজেই 6 হতে সুরু করে 2, 3 বা 4টি তল যোগ করে যেতে পারি। অতএব অনুমিত হতে, 4-ধার বিশিষ্ট বহুতলকের তলের সংখ্যা হতে পারে

$F=6, 8, 9, 10, 11, \cdots \cdots$।

এর পরে $k=5$ বহুতলক বিশেষ উদাহরণ $F=12$ মাত্র নিয়ে আলোচনা করব। এক্ষেত্রে 7.14 নং চিত্র দ্রষ্টব্য।

7.14(b) চিত্র হতে দেখা যায় যে 5টি তল হতে $5+2+2=9$টি তল পাওয়া যায়। কাজেই 12টি তল হতে $12+4=16$টি তল পাওয়া যাবে। যে দুইটি শীর্ষবিন্দু



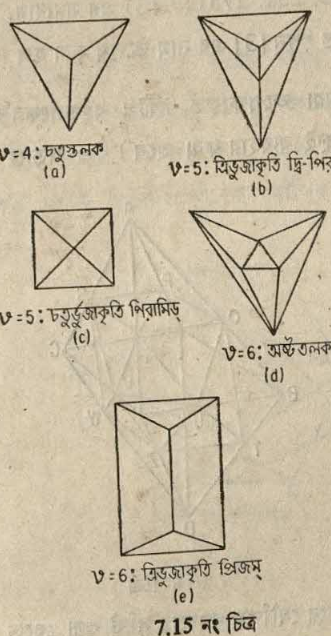
7.14 নং চিত্র

পঞ্চভুজ তলে পড়েছে সেদুটি হতে, X চিহ্নিত বিন্দুগুলি হতে আরও দুইটি তল পঞ্চভুজে বেষ্টিত হয়ে পাওয়া যাবে। কাজেই

$$F = 12, 16, 18, 20, 22, \cdots$$

1.4 $k=3$ এর সহিত জড়িত প্রশ্নের উত্তর কেইলি 1862 সনেই বিশদ আলোচনা করেছেন।

আমরা নীচে v শীর্ষক কতকগুলি বহুতলক চিত্র দিলাম। v এর মান $v=4, 5, 6$ নেওয়া হল। 7.15 নং চিত্রগুলি দ্রষ্টব্য।



7.15 নং চিত্র

গ্রন্থপঞ্জীতে হকিন্স, হিল্, রীড্ ও টিরেল্ [2] এর নাম উল্লেখ করা হল।

1.5. ছবি আঁকবার উৎসাহ বাড়াবার জন্য একটু ভিন্ন ধরনের প্রশ্ন আলোচনা করব। দীর্ঘকালের আলোচিত প্রশ্ন যে সমান্তর আয়তক্ষেত্রাকার ষট্ফলকের অস্তিত্ব আছে কিনা যার ধারগুলি, তলের কর্ণগুলি, অন্তঃস্থ কর্ণগুলি সকলেরই মান পূর্ণসংখ্যক। মনে হতে পারে যে সবগুলি ধার এবং কর্ণ পূর্ণসংখ্যা হবে না। কিন্তু অষ্টাদশ শতাব্দী হতে একটি সমাধানের পরিবার চলতি আছে। প্রশ্নটি আসলে চারটি সমীকরণের পূর্ণসংখ্যক সমাধান। চারটি সমীকরণ হলেও তাতে সাতটি চল আছে। নীচে সমীকরণ চারটি লেখা হল:

$$x^2+y^2=t^2,\ x^2+z^2=u^2,\ y^2+z^2=v^2,\ x^2+y^2+z^2=w^2 \qquad \ldots \quad (7.13)$$

(7.13) সমীকরণগুলির সমাধান নিম্নরূপে দেওয়া যেতে পারে:

$$x=a(4b^2-c^2),\ y=b(4a^2-c^2),\ z=4\,abc,$$

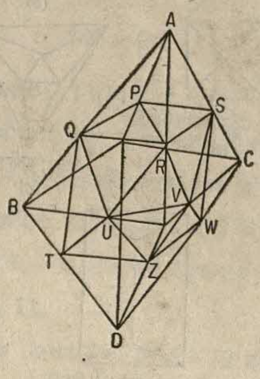
$$a^2+b^2=c^2 \text{ এবং } a, b, c \text{ ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।} \qquad \ldots \quad (7.14)$$

সবচেয়ে সরল সমাধান $(a, b, c)=(3, 4, 5)$। অতএব

$(x, y, z)=(117, 44, 240)$। কিন্তু এর অর্থ এই নয় যে (7.14) পরিবার-বহির্ভূত (7.13) এর অন্য সমাধান নাই। যেমন

$(x, y, z)=(640, 252, 275)$ (7.13) এর সমাধান, কিন্তু (7.14) পরিবার-বহির্ভূত। গ্রন্থপঞ্জীতে স্পন্ [3] এর নাম উল্লেখ করা হল।

1.6. এখন আমরা অপেক্ষাকৃত জটিল বহুতলকের অঙ্কন আলোচনা করব। শ্লাফ্‌লী সাঙ্কেতিক চিহ্নই ব্যবহার করা হবে। এ অত্যন্ত পরিচিত যে একাধিক



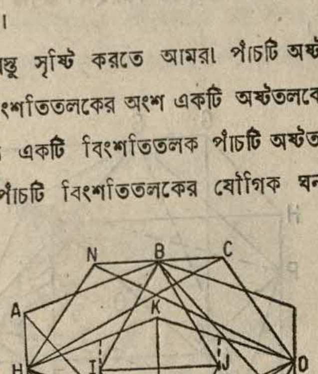
7.16 নং চিত্র

সরল সুষম ঘনবস্তু একত্র করে যৌগিক ঘনবস্তুর সৃষ্টি করা যেতে পারে এবং ঐ ঘনবস্তু অনেক জটিলতর প্রতিসাম্যযুক্ত আকৃতির হবে: যথা দুইটি চতুস্তলকের যোগে একটি

ঘনকের প্রতিসাম্য সৃষ্টি করা যায়, পাঁচটি ঘনকের সাহায্যে একটি সুষম দ্বাদশ-তলকের প্রতিসাম্য পাওয়া যায় ইত্যাদি। আমরা একটি সুষম যৌগিক দ্বাদশ-তলকের আকৃতি দেখাব। এরূপ সৃষ্টিতে প্রাথমিক সোপান হিসাবে আমরা সুষম বিংশতি তলকের সঙ্গে যৌগিক মিশ্রণ করব। পৃথকভাবে অবশ্য বিংশতিতলক বা অপর ঘনবস্তুর প্রাপ্ত প্রতিসাম্যের ধর্ম নাই। 7.16 নং চিত্রে একটি সুষম বিংশতি তলককে একটি সুষম অষ্টতলকের মধ্যে অন্তর্লিখিত করা হয়েছে। এরূপ করেই বিংশতি তলকগুলির যৌগিক ঘনবস্তুর সৃষ্টি হয়েছে।

স্পষ্টতঃই *ABCD* অষ্টতলক *BC* তলের উভয় দিকে অবস্থিত। *A* বিন্দু *BC* তলের একদিকে ও *D* বিন্দু এর বিপরীত দিকে অবস্থিত। *PQRSTUVWZ* বিংশতি তলকটি অষ্টতলকে অন্তর্লিখিত হয়েছে। *QRS* বিংশতি তলকের একটি তল এবং *TUVW* অপর একটি তল। *P* এবং *Z* বিংশতি তলকের বিপরীত শীর্ষবিন্দু দুইটি। দুইটি বহুতলক একত্র করে আমরা দুইটি বহুতলক অংশ একত্র নক্ষত্রসদৃশ বিংশতিতলক *AQRSBUVC, DTZWBUVC* এর সঙ্গে যুক্ত হয়ে হয়েছে। লক্ষ্য করা যেতে পারে যে দুইটি বিংশতি তলকের অংশ অষ্টতলকের মধ্যে অনুরূপ অবস্থানে অবস্থিত।

দ্বিতীয় যৌগিক ঘনবস্তু সৃষ্টি করতে আমরা পাঁচটি অষ্টতলক ব্যবহার করব। ঠিক আগের ন্যায় দুইটি বিংশতিতলকের অংশ একটি অষ্টতলকের মধ্যে অন্তর্লিখিত করা হল। এদের মধ্যে একটি বিংশতিতলক পাঁচটি অষ্টতলকের মধ্যে সাধারণ। অপর বিংশতি তলকটি পাঁচটি বিংশতিতলকের যৌগিক ঘনবস্তুর কেন্দ্র হয়েছে।



7.17 নং চিত্র

লক্ষ্য করা যেতে পারে যে প্রত্যেকটি শীর্ষবিন্দুই একইরূপ যেহেতু অষ্টতলকেও সেগুলি অনুরূপ অবস্থানে রয়েছে। 7.17 নং চিত্র দ্রষ্টব্য। লক্ষ্য করা যেতে পারে

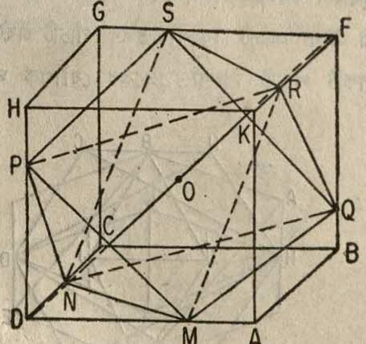
যে পাঁচটি অষ্টতলকের কেন্দ্রস্থ তলগুলি যথাক্রমে *ABEF, CDGH, NDMH, HKDL* এবং *BIFJ*। এক্ষেত্রেও নক্ষত্রসদৃশ সুন্দর ঘনবস্তুর সৃষ্টি হয়েছে।

এবার আমরা একটি ঘনকের ভিতর একটি সুষম অষ্টতলক অন্তর্লিখিত করব যাতে তার শীর্ষবিন্দুগুলি ঘনকের ছয়টি ধারে অবস্থিত হয়। লক্ষ্যণীয় যে অষ্টতলকের ছয়টি শীর্ষবিন্দু। চারটি সুষম অষ্টতলক একটি ঘনকের ভিতর অন্তর্লিখিত হতে পারে। এখন প্রশ্ন যে 32টি তলের ভিতর কোণগুলি সাধারণ।

আবার সুষম অষ্টতলক দিয়ে শুরু করে কতগুলি ঘনবহুভুজই বা এর ভিতর এরূপে অন্তর্লিখিত হতে পারে? সেক্ষেত্রে কিরূপ বহুতলককেই বা এদের শীর্ষবিন্দুগুলি সৃষ্টি করে?

চারটি সুষম অষ্টতলক ঘনকের মধ্যে অন্তর্লিখন প্রণালী নীচে দেওয়া হল।

আমরা প্রথমে ঘনকের অন্তঃস্থ কর্ণ চারটি বেছে নিলাম এবং ধরে নিলাম ধারের দৈর্ঘ $e_0 = e$। এদের একটিকে সুষম অষ্টতলকের চারটি তলসৃষ্ট শীর্ষবিন্দু যোগকারী কর্ণের সঙ্গে মিলিত করা হল। ঘনকের কর্ণকে তিনটি বিন্দু দিয়ে বিভক্ত করা হল। বিন্দু তিনটি *J, O, K* দিয়ে নির্দেশিত করা হল। কর্ণটি চারটি অংশে বিভক্ত হয়েছে। 7.18 নং চিত্র দ্রষ্টব্য।



7.18 নং চিত্র

$DJ = JO = OK = KF$ এবং *SRQ, PNM* তলগুলি *DF* কর্ণের উপর লম্ব। এই তল দুইটি ঘনককে *MNP* এবং *QRS* ত্রিভুজ দুইটিতে ছেদ করে। এই দুইটি ত্রিভুজ একটি সুষম অষ্টতলকের বিপরীত তল দুইটিতে পরিণত হয়েছে। কাজেই এদের

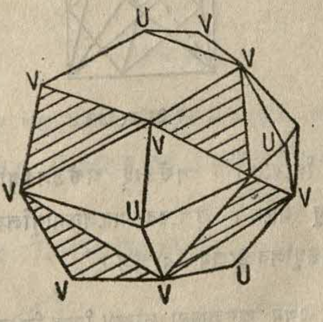
শীর্ষবিন্দুগুলি নির্দিষ্ট হয়েছে। অতএব $DM = DN = DP = FS = FQ = FR$ এবং এদের প্রত্যেকেরই মান $\frac{3e}{4}$। কাজেই

$$MN^2 = \frac{9e^2}{16} + \frac{9e^2}{16} = \frac{e^2}{16} + e^2 + \frac{e^2}{16} = MQ^2 \qquad \ldots \quad (7.15)$$

অতএব অন্তর্লিখিত অষ্টতলকের প্রত্যেকের ধার

$$e_0 = 3\sqrt{2}\,\frac{e}{4}$$

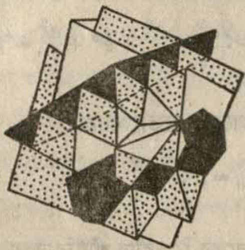
কাজেই অন্তর্লিখিত অষ্টতলকের বিপরীত শীর্ষবিন্দুদ্বয় S এবং M এবং মধ্যবর্তী তল $PRQN$। ঘনকের প্রত্যেকটি অন্তঃস্থ কোণের সাহায্যে এক একটি অষ্টতলক এরূপে আঁকা যায়। চারটি অন্তঃস্থ কর্ণই পৃথক পৃথক অষ্টতলক দিয়েছে। এই চারটি অষ্টতলকের 24টি শীর্ষবিন্দু আছে এবং 32টি ত্রিভুজাকার তল আছে। এই চারটি অষ্টতলকের সাধারণ অংশ 32টি ত্রিভুজাকার তলবেষ্টিত বহুতলক। এই বহুতলকটির শীর্ষবিন্দুগুলি U এবং V দিয়ে নির্দিষ্ট করা হল। বহুতলকটির জন্য 7.19 নং চিত্র দ্রষ্টব্য। U-এর সংখ্যা 6টি এবং V এর সংখ্যা 12টি। U বিন্দুগুলি ঘনকের অন্তঃস্থ এবং V বিন্দুগুলি ঘনকের তলের উপর অবস্থিত।



7.19 নং চিত্র

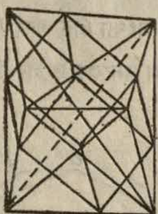
7.19 চিত্রের দ্বৈতচিত্রও পাওয়া যেতে পারে। দ্বৈত প্রশ্নটি হবে নিম্নরূপ: একটি সুষম অষ্টতলকে তিনটি ঘনক অন্তর্লিখিত হতে পারে। ঘনক তিনটির 24টি শীর্ষবিন্দু আছে। কাজেই ঘনক তিনটির সাধারণ অংশ যে বহুতলক সৃষ্টি করে তার $3.6 = 18$টি তল আছে। এই বহুতলকের জন্য 7.20 নং চিত্র দ্রষ্টব্য।

যদি সুষম অষ্টতলকটির উচ্চতা মধ্যতল হতে 'a' মানের হয়, তবে অন্তর্লিখিত ঘনকটির শীর্ষবিন্দুগুলির অক্ষতলগুলি হতে দূরত্ব $(2-\sqrt{2})a$ এবং $(\sqrt{2}-1)a$



7.20 নং চিত্র

হবে। 7.1 নং চিত্র দ্রষ্টব্য। অক্ষতলগুলি পরস্পর বদলিয়ে নিলে আমরা তিনটি ঘনককে সুষম অষ্টতলকে বিপরীত ক্ষেত্রে, একটি ঘনকের চারপাশে আমরা তিনটি সুষম অষ্টতলককে বহির্লিখিত করতে পারব। অষ্টতলকের ধারগুলি ঘনকের



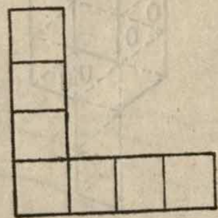
7.21 নং চিত্র

শীর্ষবিন্দুগুলি দিয়ে গিয়েছে। স্পষ্টতঃই অষ্টতলকগুলির সাধারণ বহুতলকের $6.3=18$টি শীর্ষবিন্দু আছে। উপরের আলোচনাগুলির গ্রন্থপঞ্জীতে স্মিথ্ [4], ব্যাকোস্ [5] এর প্রবন্ধগুলির উল্লেখ করা হল।

1.7 আমাদের এখন আলোচনা ঘুরিয়ে নিয়ে কি করে পাত থেকে বহুতলকের মডেল তৈরী করা যায় আলোচনা করব। এদিকটা অত্যন্ত কৌতূহলোদ্দীপক। সবচেয়ে বেশী ব্যবহৃত প্রণালী সাধারণতঃ ঘনবস্তুটির তলগুলি দিয়ে জাল সৃষ্টি করা। প্রধানতঃ এই উদ্দেশ্যে কার্ডবোর্ড ব্যবহৃত হয়ে থাকে। অবশ্য আঁঠা বা সিমেণ্ট ব্যবহার বাঞ্ছনীয় নয়। বাস্তব মডেলটি তৈরী করতে, জালগুলিতে মোটা দাগ যেখানে দেওয়া হয় সেখানে কাটতে হবে এবং যেখানে সরু দাগ বা ভাঙ্গা ভাঙ্গা দাগ দেওয়া হয় সেখানে

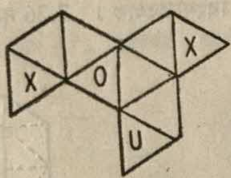
ভাঁজ দিতে হয়। কার্ডবোর্ড হতে শক্ত কাগজই ব্যবহার প্রশস্ত। এখন আমরা বিশেষ বিশেষ মডেল তৈরীর পূর্ণ বাস্তব বিবরণ দেব। স্থানের অভাবে অনেক উদাহরণ দেওয়া অবশ্য সম্ভব হবে না।

1 নং উদাহরণ : ঘনক। এক্ষেত্রে 7.22 নং চিত্র দ্রষ্টব্য।



7.22 নং চিত্র

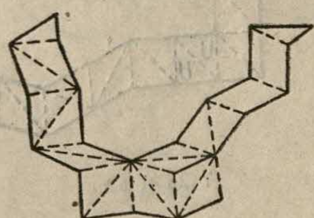
2 নং উদাহরণ : চতুস্তলক। 7.23 নং চিত্র দ্রষ্টব্য।



7.23 নং চিত্র

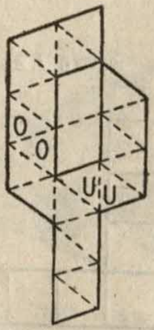
X-চিহ্নিত তলগুলি শক্ত করবার উদ্দেশ্য না থাকলে চতুস্তলকের মডেল তৈরী করতে বাদ দেওয়া যায়। *O* চিহ্নের অর্থ উপরিস্থ তল এবং *U* চিহ্নের অর্থ নিম্নস্থ তল।

3 নং উদাহরণ : 7.24 নং চিত্র দ্রষ্টব্য।



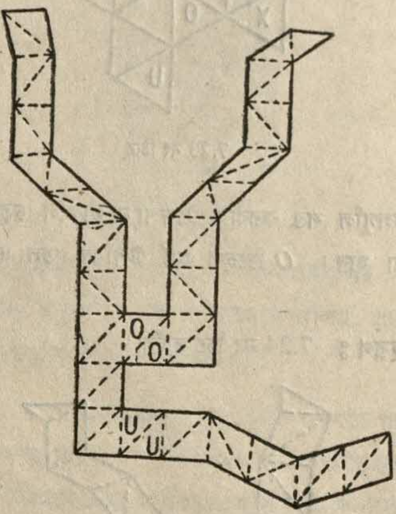
7.24 নং চিত্র

4 নং উদাহরণ : অষ্টতলক। 7.25 নং চিত্র দ্রষ্টব্য।



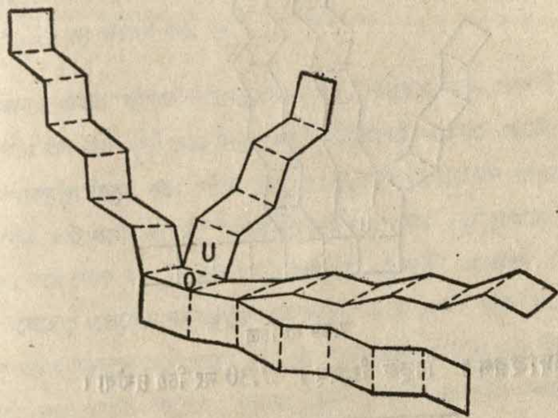
7.25 নং চিত্র

5 নং উদাহরণ : বিংশতিতলক। 7.26 নং চিত্র দ্রষ্টব্য।



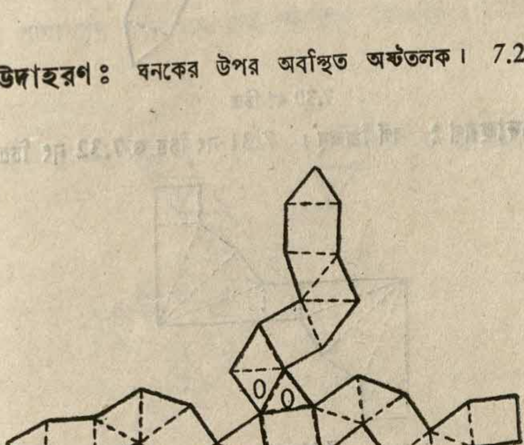
7 .26 নং চিত্র

6 নং উদাহরণ : রম্বস্‌-দ্বাদশতলক। 7.27 নং চিত্র দ্রষ্টব্য।



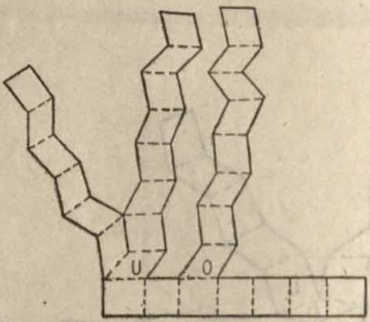
7.27 নং চিত্র

7 নং উদাহরণ ঃ ঘনকের উপর অবস্থিত অষ্টতলক। 7.28 নং চিত্র দ্রষ্টব্য।



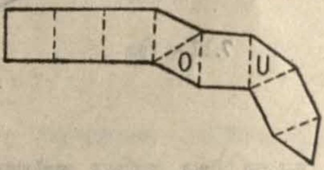
7.28 নং চিত্র

8 নং উদাহরণ ঃ ষট্‌ভূজ প্রিজম্। 7.29 নং চিত্র দ্রষ্টব্য।



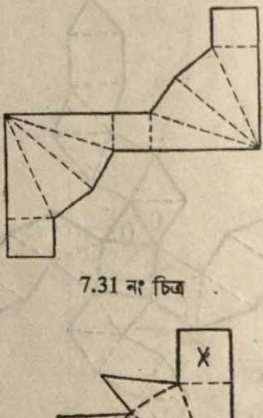
7.29 নং চিত্র

9 নং উদাহরণ ঃ ত্রিভুজ প্রিজম্। 7.30 নং চিত্র দ্রষ্টব্য।

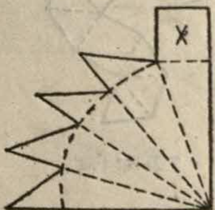


7.30 নং চিত্র

10 নং উদাহরণ ঃ বর্গ প্রিজম্। 7.31 নং চিত্র ও 7.32 নং চিত্র দ্রষ্টব্য।



7.31 নং চিত্র

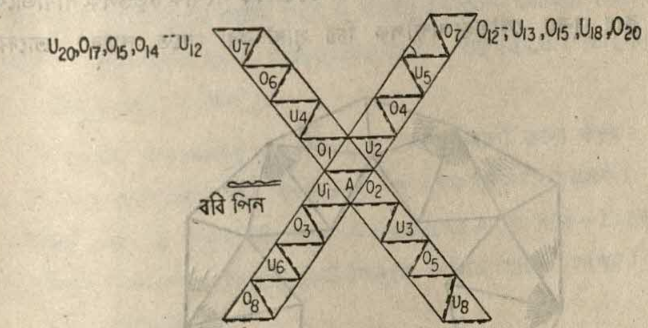


7.32 নং চিত্র

এখানে গ্রন্থপঞ্জীর কিছু নাম যথা কাণ্ডি এবং রোলেট্ [6], পার্গেটার [7], বল্ এবং কোক্সিটার [8] এর উল্লেখ করা হল।

1.8. আমরা এবার 'গণিতবিদ্দের খেলনা' তৈরী করবার নতুন প্রণালী দেখাব। একে সাধারণতঃ বলা হয় ঘূর্ণী আঙ্টি। সুষম চতুস্তলকই একমাত্র প্লেটোর ঘনবস্তু যার বিপরীত ধারগুলি বিস্তৃত করে দিলে ধারগুলির কোনটিই সমান্তরাল রেখা হয় না। সুষম চতুস্তলকের এই ধর্মের জন্যই কয়েকটি একইরূপ সুষম চতুস্তলককে বিপরীত বাহুগুলি একত্র করে যোগ করে মনমাতানো রূপের ঘূর্ণী আঙ্টি বহুতলক তৈরী করা সম্ভব হয়। যেহেতু, প্লেটোর ঘনবস্তুগুলি সমতল কাগজের টুকরা ভাঁজ করে জোড়া করা যায়, অতএব অনুমান হতে পারে যে চতুস্তলকের তৈরী ঘোরান আঙ্টি বহুতলক অনুরূপে তৈরী করা যেতে পারে। আমরা তৈরী করবার প্রণালীর বিবরণ নীচে দিলাম। প্রণালীটির প্রথমধাপ নিম্নরূপ ঃ

দুইটি কাগজের সমান্তরাল ধারওয়ালা টুকরা ফালি নিয়ে তাতে অন্ততঃ 50টি সমবাহু ত্রিভুজ পাশাপাশি ভাঁজ করে সেই অনুসারে আঁকা হল। 7.33 নং চিত্র দ্রষ্টব্য।



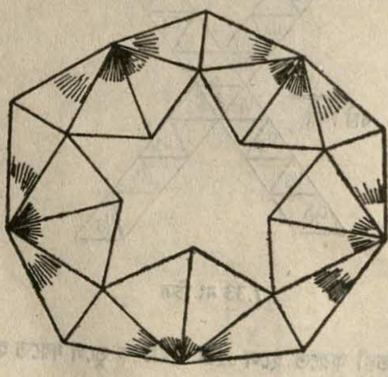
7.33 নং চিত্র

প্রথম চতুস্তলকটি তৈরী করতে হলে AB ধারটিকে তুলে ধরতে হবে ববি পিনের সাহায্যে এবং U_1 ত্রিভুজকে O_1 ত্রিভুজের নিচে ঠেলে দিতে হবে। তারপরে U_2 ত্রিভুজকে O_2 এর নীচে নিতে হবে। লক্ষ্য করবার বিষয় যে ধারগুলি - - - চিহ্নিত, সব সময়ই চতুস্তলকের সেই ধার হবে যে ধার অন্য চতুস্তলকের সঙ্গে যুক্ত নয়। এখন ববি পিনটি সরিয়ে নিয়ে বিপরীত ধারে পূর্ণ হওয়া চতুস্তলককে চেপে ধরে থাকতে

হবে যাতে তলগুলি খুলে না পড়ে। চারটি সমান্তরাল রেখার কাগজের ফালিকে পৃথকভাবে ধরে নিয়ে নিলাম এমনভাবে যে U_3, O_3 একদিকে থাকে এবং U_4, O_4 অপরদিকে থাকে যাতে একটি 'X' কাঁটাচিহ্ন সৃষ্টি হয় এবং পূর্ণ হওয়া চতুস্তলকের নীচে আগের ছবি 7.33 চিত্রের মত থাকে। এখন পূর্বের জোড়া লাগানোর পদ্ধতি পুনরাবৃত্তি করতে হবে U_3, O_3 এবং U_4, O_4 ত্রিভুজগুলি নিয়ে। পুনরায় ববি পিন সরিয়ে নিয়ে নতুন চতুস্তলকটিকে ধরে কাগজের ফালিগুলিকে পৃথক রেখে U_5, O_5 এবং U_6, O_6 ত্রিভুজগুলিকে একই প্রণালীতে ভাঁজ করতে হবে। এইরূপে ভাঁজ করা চালিয়ে যেতে হবে।

যখন আমরা 8টি বা 10টি চতুস্তলককে শৃঙ্খলিত করেছি, শেষ চারটি ধার হতে চতুস্তলকগুলিতে কেটে ছাড়িয়ে নিলাম। অর্থাৎ, কাগজের ফালিগুলির চতুস্তলক হয়ে গিয়ে বাকী অংশ ছেঁটে বাদ দিয়ে দেওয়া হল। শেষ ধার এবং প্রথম ধার চতুস্তলক শৃঙ্খলের AB বাহুর সঙ্গে জুড়ে দেওয়া হল। কাগজের ফালির বাকী ত্রিভুজগুলিকে প্রথম চতুস্তলকের চারপাশে জড়িয়ে দেওয়া যেতে পারে। শেষ দুইটি ধার ইচ্ছে করলে স্বচ্ছ আঁটাল ফিতা বা আঁটা দিয়ে জুড়ে দেওয়া যায়।

যখন এরূপ মডেল 10টি চতুস্তলক হতে তৈরী হবে তখন চিত্রটি বিশেষভাবে চিত্তাকর্ষক। 7.34 নং চিত্র দ্রষ্টব্য। 22টি বা ততোধিক সংখ্যক চতুস্তলক নানাভাবে শৃঙ্খলিত করে সুন্দর কৌতুহলোদ্দীপক চিত্র সৃষ্টি করা যেতে পারে। তাদের



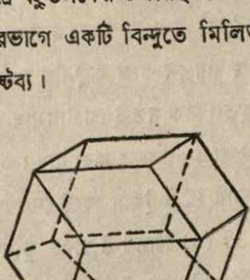
7.34 নং চিত্র

নানাভাবে ঘোরালে যে ছবি ভেসে ওঠে তা যাদুর ন্যায় মন্ত্রমুগ্ধ করে। 7.34 নং চিত্রে 10টি চতুস্তলক ব্যবহার করা হয়েছে।

পূর্বেই আন্দাজ দেওয়া হয়েছে যে এরূপ উত্তল বহুতলকের সেটের সাহায্যে ঘোরান সুন্দর মনোমুগ্ধকর বহুতলক সৃষ্টি করা যেতে পারে যদি ঐ উত্তল বহুতলকের বিপরীত ধারগুলি সমান্তরাল রেখার উপর অবস্থিত না হয়ে থাকে। কিন্তু একটি 8 সংখ্যক ছিন্ন চতুস্তলকের ঘোরান বহুতলক আশ্চর্যজকভাবে 8 সংখ্যক পূর্ণ চতুস্তলকের ঘোরান বহুতলক হতে পৃথক, অর্থাৎ 'পিতা হতে পুত্রের পার্থক্য অনেক'। আবার 14টি ষোড়শ-ত্রিভূজাকার-তলকের ঘোরান বহুতলক 'অনেকটা ছুটির দিনের জন্য ব্যবহৃত' মালার ন্যায় দেখায়। শেষে উল্লিখিত প্রত্যেকটি বহুতলকই শৃঙ্খলিতভাবে প্রস্তুত করা যায়। ইচ্ছা করলে একক ঘনবস্তুটির সংখ্যা বাড়িয়ে নেওয়া যায়। কিন্তু এরূপ সৃষ্টি করার জন্য আগেই বেশী অগ্রসর হওয়া উচিত নয় এই আশঙ্কায় যে ব্যর্থতা এসে বিষণ্ণ করে দিতে পারে। অবশ্য অত্যন্ত কৌতূহলী হয়ে পড়লে নিশ্চয়ই অগ্রসর হতে হবে।

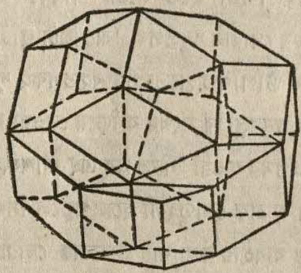
অন্যান্য যে সব ঘনবস্তু ব্যবহার করা যায় উপরোক্ত ঘোরান বহুতলক সৃষ্টি করবার জন্য তাদের মধ্যে উল্লেখ করা যেতে পারে বর্গাকার বিপরীত প্রিজ্‌ম্‌, দ্বাদশ ত্রিভূজের সুষম বহুতলক এর। অবশ্যই আরও অনেক ঘনবস্তুর সম্ভাবনা আছে, যথা চতুস্তলকগুলি ঘনকের সঙ্গে যুক্ত হয়ে একটি একক ঘনবস্তু সৃষ্টি করে ইত্যাদি। প্রাথমিক স্তরে ছাত্র-ছাত্রীরা জ্যামিতিতে এইসব মডেল দেখলে তাদের কৌতূহল জাগবে। এইসব ঘনবস্তুর আকৃতি আবিষ্কার করতে গিয়ে ও তাদের কৌতূহল মেটাতে গিয়ে তাদের ঘনজ্যামিতি বিষয়ে অনেক জ্ঞান অর্জিত হয়ে যাবে। গ্রন্থপঞ্জীতে পেডার্‌সন্‌ [9], নিউম্যান্‌ [10] এর উল্লেখ করা হল।

1.9. এখন অপেক্ষাকৃত সরল ঘনবস্তুর নির্মাণ-প্রণালী বর্ণনা করব। এদের মধ্যে ধরা যেতে পারে রম্বস্‌ সুষম দ্বাদশতলক বা রম্বস্‌ ষট্‌সমবিন্দুতলক। আমরা প্রমাণ করতে পারি যে এক্ষেত্রে বহুতলকের উপরিস্থতলের সংখ্যা $n(n-1)$ যেখানে n একটি বিন্দুতে ঘনবস্তুর উপরিভাগে একটি বিন্দুতে মিলিত ধারের সংখ্যা। 7·35 এবং 7.36 নং চিত্রে দুইটি দ্রষ্টব্য।



7.35 নং চিত্র : $n=4$

যেহেতু সমস্তগুলি তলই সামন্তরিকাকৃতি, প্রত্যেকটি ধারই একটি তলকে পরিসীমিত করতে সাহায্য করে এবং প্রত্যেকটি ধারের একটি সমান্তরাল ধার আছে। প্রত্যেকটি তলের একটি সমান্তরাল তল থাকায় জোড়া সৃষ্টি হয়েছে এবং জোড়ার উভয় তলই সমান্তরাল এবং সর্বসম। অনুরূপভাবে বিপরীত ধারগুলিও জোড়া সৃষ্টি



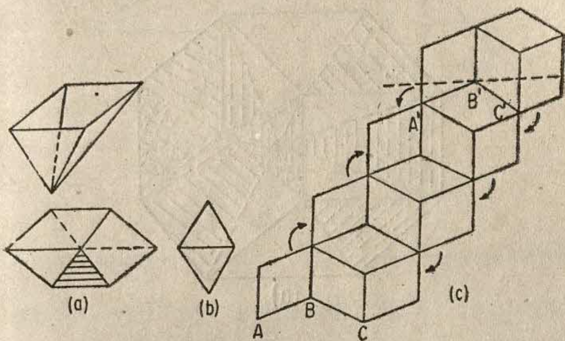
7.36 নং চিত্র : $n=6$

করে এবং এদের বিপরীত দুইজোড়ার মিলনবিন্দুগুলি যুক্ত করলে একই মধ্যবিন্দু দেবে। কাজেই বহুতলকটির কেন্দ্রের চারদিকের প্রতিসাম্য আছে। প্রতিসাম্যের প্রত্যেকটি অঞ্চল দুইদিকে দুইটি অঞ্চলের সঙ্গে যুক্ত। যদি ধারগুলি n বিভিন্ন দিকে প্রসারিত থাকে তবে n-সংখ্যক প্রতিসাম্যের অঞ্চল আছে ও $(n-1)$-জোড়সংখ্যক বিপরীত তল আছে। কাজেই বহুতলকে সর্বমোট $\binom{n}{2}$-সংখ্যক বিপরীত তল আছে। বস্তুতপক্ষে, n বিভিন্নদিকে প্রতি দুইটি ধারের জন্য এক জোড়া তল পাওয়া যাচ্ছে। অতএব সর্বমোট বহুতলকের তলের সংখ্যা $n(n-1)$।

রম্বস্ দ্বাদশতলকের একটি তলের ধারগুলির অন্তঃস্থ কোণগুলি $63° 26'$ এবং $116° 34'$। এরূপ বহুতলক তৈরী করা খুব সহজসাধ্য মনে হয় না। তবে যদি মডেলের গঠনপ্রণালী সহজ করা যায় সে কাজ বাঞ্ছনীয় হবে। এই উদ্দেশ্যে 7.37 নং চিত্র প্রথমে দ্রষ্টব্য। এরূপ বহুতলককে সত্যই গোটানসাধ্য তলক বলা যায় বা এরূপ বহুতলককে গুটিয়ে নিয়ে একটি তলে পরিণত করা যায়।

প্রথমে 7.37 (a) চিত্রের ন্যায় 12টি টুকরা কেটে নেওয়া হল। প্রত্যেকটি টুকরা ভাঙ্গা রেখা দিয়ে ভাঁজ করে 7.37 (a) চিত্রের উপরের ভূমিতলবিহীন পিরামিড তৈরী করতে হবে। তারপরে প্রায় বিশটির মত 7.37 (b) চিত্রের ন্যায় দুই ত্রিভুজের জোড় তৈরী করতে হবে এবং তাদের 16টি ব্যবহার করে 12টি বাক্স জুড়তে হবে—যেমনটি 7.37(c) চিত্রে দেখানো হয়েছে। খোলা দিকের ধারগুলি সব সময়েই আমাদের

সামনের দিকে থাকবে। 7.37 (c) চিত্রে সবকিছুই বিশদভাবে দেখান আছে। এখন গোটানসাধ্য-তলকটি সম্পূর্ণ করে দুই রকমের মডেল তৈরী করা হতে পারে।



7.37 নং চিত্র

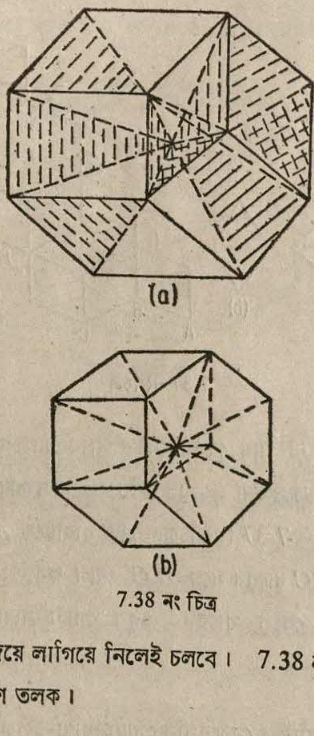
(ক) প্রথম মডেলটির নাম দেওয়া যেতে পারে গোলকমধ্যরেখীয় গোটানসাধ্য বহুতলক। 7.38 (a) চিত্র দ্রষ্টব্য। এই মডেলে গোলকমধ্যরেখীয় অঞ্চলের চার-পাশে 6টি বাক্স রয়েছে। 7.37 (c) চিত্রের AB ধারটিকে $A'B'$ ধারের সঙ্গে যোগ করে দিতে হবে এবং BC ধারের সঙ্গে $B'C'$ যোগ করতে হবে। এক্ষেত্রে তীর-চিহ্নগুলি উপেক্ষা করা যেতে পারে। এরূপ গোটানসাধ্য-তলকটি ভেঙ্গে সুষম ষষ্ঠভুজে পরিণত হয়।

(খ) দ্বিতীয় মডেলটিকে মেরুরেখীয় গোটানসাধ্য-তলক বলা চলে।

7.38 (b) নং চিত্র দ্রষ্টব্য। এই বহুতলকটি মেরুরেখার চারদিকে সুষমভাবে ছড়িয়ে আছে। এটিকে আমরা সম্পূর্ণ করতে পারি তীরচিহ্নের দিকে ভাঁজ ফেলতে ফেলতে। এখানে বিন্দু নির্দেশক অক্ষরগুলিকে উপেক্ষা করা চলতে পারে। এক্ষেত্রে বহুতল গুটিয়ে সুষম ষষ্ঠভুজের $\frac{4}{6}$ অংশে পরিণত করা যায়। যেমন আশা করা যেতে পারে দুইটি ক্ষেত্রেই উভয় মডেলেই চারটি সর্বসম অক্ষরেখীয় অঞ্চল আছে এবং প্রত্যেকটিতে ছয়টি বাক্স আছে। আবার প্রত্যেকটি বাক্স দুইটি অঞ্চলের সঙ্গে যুক্ত। অতএব প্রত্যেকটি মডেলেই 12টি মোট সংখ্যক বাক্স আছে।

মডেলগুলিতে রঙ দেবার একটা উপায় হবে রঙীন কাগজ আঁঠা দিয়ে আটকান। সেজন্য এরূপ কাগজের দোকান হতে কাগজ কিনে নিয়ে অনেকগুলি দুইটি ত্রিভুজের

পাত নানারঙের তৈরী করতে হবে। এগুলি পরে তলগুলির উপর আঁঠা দিয়ে সেঁটে দিলেই রঙ করার কাজ হয়ে যাবে। আঁঠা লাগান কাগজ না পাওয়া গেলে সাধারণ



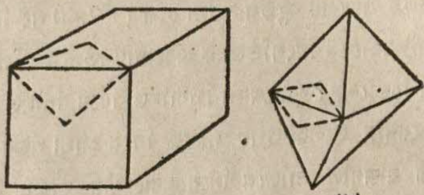
7.38 নং চিত্র

রঙীন কাগজকে আঁঠা দিয়ে লাগিয়ে নিলেই চলবে। 7.38 নং চিত্রের মডেল দুইটিকে বলা চলে অর্ধ-রম্বস্-দ্বাদশ তলক।

1.10 যদিও মডেল তৈরী করে বিভিন্ন জ্যামিতিক ধর্ম প্রদর্শন করা যথেষ্ট কষ্ট-সাধ্য, যথা কোন ঘনবস্তুর সঙ্গে ঘনকের, অষ্টতলকের বা চতুস্তলকের সম্বন্ধ নির্ণয় করা, কিন্তু প্রাথমিক স্তরের শিক্ষার্থীদের পক্ষে এরূপ নির্ণয় করা খুবই সমীচীন হবে, কারণ এতে কল্পনা জাগ্রত হয়। কল্পনার সঙ্গে মননশক্তি যোগ হলে আরও জটিল গোটান-সাধ্য বহুতল সৃষ্টির পথ বার করতে পারা যাবে।

উদাহরণস্বরূপ ধরা যাক আমরা একটি ঘনকের সঙ্গে 12টি বাক্সের গোটানসাধ্য বহু-তলকের সম্বন্ধ কাজে লাগাব। লক্ষ্যণীয় যে ঘনকের যে কোন ধারের দুইদিকের তলে ত্রিভুজ এঁকে আমরা একটি তির্যক চতুর্ভুজ যার দুইটি সন্নিহিত একই তলের বাহুদুইটি সমান এবং দুইটি বিপরীত শীর্ষ ঘনকের দুইটি তলে অবস্থিত। এরূপ একটি তির্যক চতুর্ভুজ ভাঙ্গা রেখা দিয়ে 7.39 নং চিত্রে দেখান হয়েছে। 7.39(*a*) তে ঘনক নেওয়া

হয়েছে এবং 7.39(b) এ অষ্টতলক নেওয়া হয়েছে। এখন ধরা যাক প্রত্যেকটি তির্যক চতুর্ভুজ অপনয়ন করে সেই জায়গায় 7.37(b)-এর ন্যায় চতুস্তলক বসিয়ে দিলেই

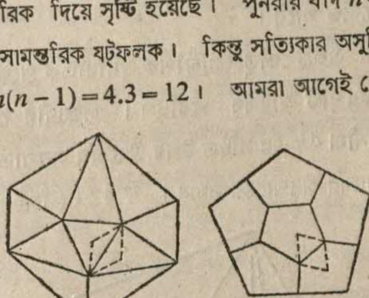


7.39 নং চিত্র

আমরা গোটানসাধ্য দ্বাদশতলক পেয়ে যাব। এইরূপ প্রণালী নীচের প্রশ্নটি আকর্ষণ করে।

(ক) কতগুলি অন্য ঘনবস্তুর এবং যে কোন আকৃতির বস্তুকে এরূপে ভাগ করা যায়? এর অর্থ এই যে ঐ বস্তুর উপর যদি তির্যক চতুর্ভুজ আঁকা যায় যার একটি কর্ণ ঐ ঘন বহুতলকের একটি ধার এবং ঐ তির্যক চতুর্ভুজের স্থলে ভূমিহীন পিরামিড আকৃতির বাক্স সাজিয়ে একটি গোটানসাধ্য বহুতলক তৈরী করা যায় কি?

(খ) আমরা পূর্বেই বলেছি যে গোটানসাধ্য বহুতলকগুলি বিভিন্ন দিকে অঞ্চল-ঘিরে অপর বহুতলকের ঘনবস্তুর সঙ্গে যুক্ত। কি করে এরূপ বহুতলক সৃষ্টি হয় তার ধারণা আনবার জন্য সহজ সরল উদাহরণ নেওয়া হল যে অঞ্চলসৃষ্টিকারী বহুতলকের সংখ্যা 2 অর্থাৎ $n = 2$। অতএব $n(n-1) = 2.1 = 2$। এর অর্থ এই যে প্রত্যেকটি আঞ্চলিক বহুতলকের n সংখ্যক দিকে তল থাকে, তাহার সংখ্যাও 2। কাজেই অঞ্চল-গুলি সমবাহু সামন্তরিক দিয়ে সৃষ্টি হয়েছে। পুনরায় যদি $n = 3$, $n(n-1) = 6$, তবে অঞ্চলগুলি হবে সামন্তরিক ষট্‌ফলক। কিন্তু সত্যিকার অসুবিধা দেখা দেয় যখন $n = 4$। অতএব $n(n-1) = 4.3 = 12$। আমরা আগেই দেখেছি যে এই প্রশ্নের

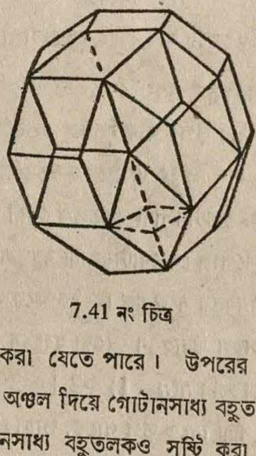


7.40 নং চিত্র

সমাধান রম্বস সুষম-দ্বাদশতলক যার 4টি অঞ্চল আছে এবং 2টি তল আছে। 7.38(a) নং চিত্র দ্রষ্টব্য। এর পরের সংখ্যা $n = 5$ এর ক্ষেত্রে 20টি ধারযুক্ত বহুতলকের

অনুসন্ধানে প্রবৃত্ত না হয়ে আমরা দ্বাদশতলক বা বিংশতিতলককে পুঙ্খানুপুঙ্খরূপে খুঁটিয়ে দেখতে পারি। দ্বাদশতলক বা বিংশতিতলক উভয়েরই 30টি ধার আছে। এদের উভয়কেই 30টি অঞ্চলের বহুতলক বলা চলে। 7.40 নং চিত্র দ্রষ্টব্য।

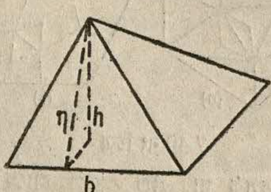
7.40 (*a*), (*b*) যথাক্রমে বিংশতিতলক এবং দ্বাদশতলকের চিত্র। যখন এই বহুতলকগুলিকে সুষম ত্রিভুজের তৈরী খোলা পিরামিড দিয়ে নির্মিত করা 30টি বাক্সের তৈরী মডেল মধ্যরেখীয় তলের উপর গুটিয়ে নিয়ে আসা সম্ভব হবে না। কাজেই 7.41 চিত্রের ন্যায় বাক্সগুলি সাজিয়ে নিয়ে মধ্যরেখীয় তলের উপর গোটানসাধ্য বহুতলক তৈরী করতে হবে। এগুলিকে যুক্ত করতে ত্রিভুজাকার পাত দিয়ে জুড়ে খোলা



7.41 নং চিত্র

পিরামিডের সাহায্যে তৈরী করা যেতে পারে। উপরের চিত্রে 30টি বাক্স রয়েছে। কাজেই আমরা 4টি ও 6টি অঞ্চল দিয়ে গোটানসাধ্য বহুতলক সৃষ্টি করতে পেরেছি। এইরূপে 42 বাক্সের গোটানসাধ্য বহুতলকও সৃষ্টি করা সম্ভব। এবিষয়ে আরও আলোচনা পরে করা যেতে পারে।

2. আমরা এখন একটি কৌতূহলোদ্দীপক জ্যামিতিক প্রশ্নের আলোচনা করব। এ প্রশ্ন অতীতে অনেকের দৃষ্টি আকর্ষণ করেছিল। লক্ষ্যণীয় যে বিখ্যাত মিশরের পিরামিডের ভূমিপরিসীমা $4b$ এর সহিত উল্লম্ব উচ্চতার অনুপাত একটি বৃত্তের পরিসীমার সহিত এর ব্যাসার্ধের অনুপাতের সমান। 7.42 নং চিত্র দ্রষ্টব্য।



7.42 নং চিত্র

শর্ত হতে $4b = 2\pi h$ ... ... (7.17)

পুনরায় লক্ষ্যণীয় যে পিরামিডের ত্রিভূজাকার তলের ক্ষেত্রফলের মান উল্লম্ব উচ্চতার বর্গফলের সমান। এর অর্থ এই যে পিরামিডের ত্রিভূজাকার তলের নতি স্বর্ণময় অনুপাতের সঙ্গে যুক্ত। অতএব

$$\frac{1}{2}b\eta = h^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (7.18)$$

$$\text{কিন্তু} \quad \eta^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + h^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}(b\eta) \quad \ldots \quad \ldots \quad (7.19)$$

অর্থাৎ, $\frac{\eta}{6} = \frac{1}{4}(\sqrt{5} + 1) = \tau$ (স্বর্ণময় অনুপাত)। এতে π এবং স্বর্ণময় অনুপাতের একটা সম্বন্ধ পাওয়া যাবে। যথা—

$$\pi = \frac{2b}{h} = \frac{4}{\sqrt{\eta\left(\frac{b}{3}\right)}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (7.20)$$

(7.20) হতে $\pi \simeq \frac{4}{\sqrt{\tau}} \simeq 3.1446$। বস্তুতঃপ্রক্ষে মিশরীয়রা বৃত্তের ক্ষেত্রফলের মানকে মনে করতেন $\left(\text{ব্যাস} - \frac{\text{ব্যাস}}{9}\right)^2$। একটি বৃত্তের যদি ব্যাস 2 একক হয়,

$$\pi \simeq \left(2 - \frac{2}{9}\right)^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^4 \simeq 3.1605\text{।}$$

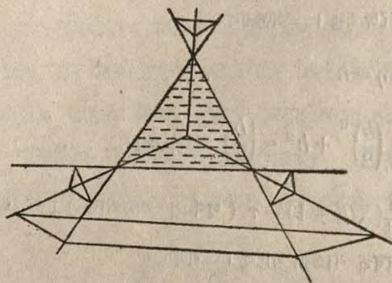
প্রকৃত মান হতে ভুলের মান 1 হাজারে 6 অংশ। গ্রন্থপঞ্জীতে পিটার্স [11] এর নাম উল্লেখ করা হল।

3. এখন আবার কিছু শৃঙ্খলিত মডেল আলোচনা করব। এগুলি প্লেটোর বহু-তলকগুলি সৃষ্টির পক্ষে সুন্দর প্রণালী। প্লেটোর বহুতলকগুলি উত্তল বহুতলক এবং এর সবগুলি তলই সুষম বহুভূজ এবং একই আকারের ও প্রত্যেক শীর্ষের চারিদিকে ধারগুলি একইরূপে বিন্যস্ত। এখন প্রশ্ন এই যে কতগুলি বিচ্ছিন্ন টুকরা সৃষ্টি হয় যখন ঐ ঘনবস্তুর তলগুলি বিস্তৃত করে দেওয়া যায়।

এখন প্রায় সকলেই এবং বিশেষতঃ কৌতূহলী ছাত্রছাত্রীদের পিতামাতা এমন প্রশ্ন পছন্দ করেন যেগুলি সে চিন্তা করে উত্তর করতে পারে। দ্বাদশতলকের ক্ষেত্রে আগের প্রশ্নের উত্তর অনায়াসেই পেতে পারে। কিন্তু সুষম বিংশতিতলকের ক্ষেত্রে উত্তরটি পাওয়ার পথ কিছুটা জটিল। পরিশেষে কিছু সামান্যীকৃত প্রশ্ন তৈরী করে শৃঙ্খলিত মডেল তৈরী করতে বলা হয়েছে। এগুলির অন্য পরিচিত মডেলের সঙ্গে নিকট সম্বন্ধ আছে।

আমরা প্রথমে সম্পূর্ণ দেশকে একটি চতুস্তলক কতগুলি প্লেটোর অংশে ভাগ করে বিচার করে দেখব। 7.43 নং চিত্র দ্রষ্টব্য।

বিস্তৃত সুষম চতুস্তলকের তলগুলি 15টি অঞ্চল সৃষ্টি করেছে।

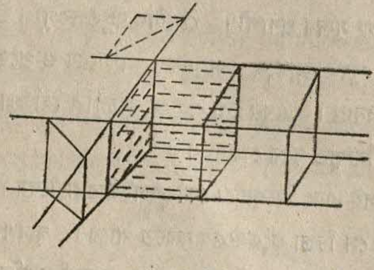


7.43 নং চিত্র

এদের

1টি চতুস্তলক দিয়ে পরিসীমিত অঞ্চল
+ 4টি একদিক খোলা ত্রিতলক অঞ্চল
+ 6টি চতুস্তলকের ধার দিয়ে তৈরী একদিক খোলা কীল
+ 4টি একদিক খোলা ও খোলাদিকের বিপরীতগুলি এক একটি চতুস্তলকের তল এরূপ কাটা ত্রিতলক অঞ্চল।
= মোট 15টি অঞ্চল।

3.1 একটি ঘনকের ক্ষেত্রে উপরিস্থ তলগুলি বিস্তৃত করলে 27টি টুকরা বিচ্ছিন্ন অঞ্চল পাওয়া যায়। 7.44 নং চিত্র দ্রষ্টব্য



7.44 নং চিত্র

এদের

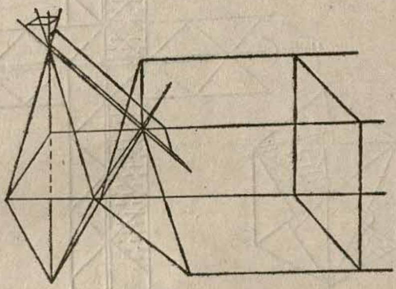
1টি ঘনকের উপরিস্থ তলগুলির দিয়ে পরিসীমিত অঞ্চল
+ 6টি একদিক খোলা বর্গাকার প্রিজম্

+12টি একদিক খোলা ঘনকে ধার দিয়ে তৈরী কীল

+8টি একদিক খোলা অপরদিকগুলি ঘনকের উপরিস্থ তলের বিস্তৃতি দিয়ে তৈরী ত্রিতলক অঞ্চল।

=সর্বমোট 27টি অঞ্চল।

পুনরায় অষ্টতলকের উপরিস্থ তলগুলি বিস্তৃত করলে 59টি বিচ্ছিন্ন অঞ্চল পাওয়া যাবে। 7.45 নং চিত্র দ্রষ্টব্য।



7.45 নং চিত্র

এদের

1টি পরিসীমিত অষ্টতলক

+ 8টি সুষম চতুস্তলক প্রত্যেকটি উপরিস্থ তলের উপর দাঁড়িয়ে

+ 6টি একদিক খোলা অষ্টতলকের শীর্ষবিন্দু হতে চতুস্তলক অঞ্চল

+24টি খোলা 8টি চতুস্তলকের ধারগুলি যেগুলি মূল অষ্টতলকের ধারগুলির সঙ্গে এক নয় সেগুলি দিয়ে তৈরী কীল

+ 8টি খোলা ত্রিতলক অঞ্চল 8টি চতুস্তলকের প্রত্যেকটি শীর্ষ হতে বিস্তৃত তলগুলি দিয়ে তৈরী

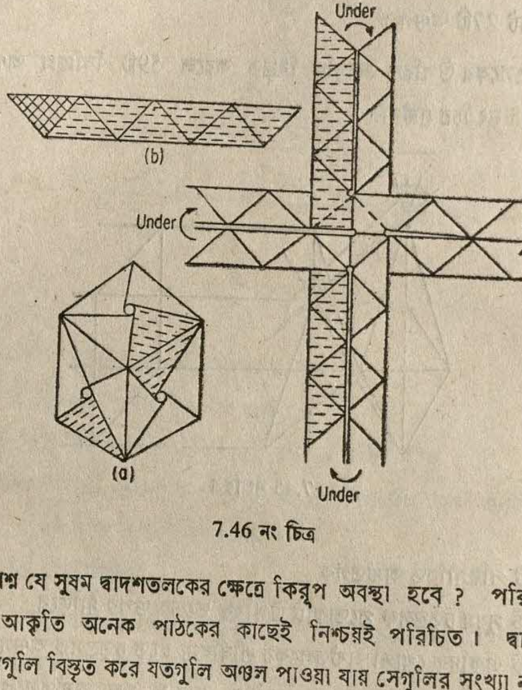
+12টি খোলা অঞ্চল যার একদিকে দুইটি সন্নিহিত চতুস্তলকের তল এবং চারটি বিস্তৃত তল

=সর্বমোট 59টি অঞ্চল।

গ্রন্থপঞ্জীতে পেডার্সেন [12] এর উল্লেখ করা হল।

3.2. শৃঙ্খলিত তলকের মডেল সৃষ্টি করতে বিকল্প প্রথা হিসারে 7.46 নং চিত্র দেওয়া হল ঘনকের ক্ষেত্রে।

মডেলটি তৈরী করবার পর আমরা প্রত্যেকটি বিভিন্ন অংশে আন্দাজ করতে পারি সমস্ত, কোন অংশ খোলা রয়েছে ঘন বহুতলকের উপরিস্থ তলগুলির পরিপ্রেক্ষিতে।



7.46 নং চিত্র

এখন প্রশ্ন যে সুষম দ্বাদশতলকের ক্ষেত্রে কিরূপ অবস্থা হবে ? পরিসীমিত ঘন অঞ্চলগুলির আকৃতি অনেক পাঠকের কাছেই নিশ্চয়ই পরিচিত। দ্বাদশ তলকের উপরিস্থ তলগুলি বিস্তৃত করে যতগুলি অঞ্চল পাওয়া যায় সেগুলির সংখ্যা নীচের গণনা হতে পাওয়া যায় :

1টি পরিসীমিত দ্বাদশতলক

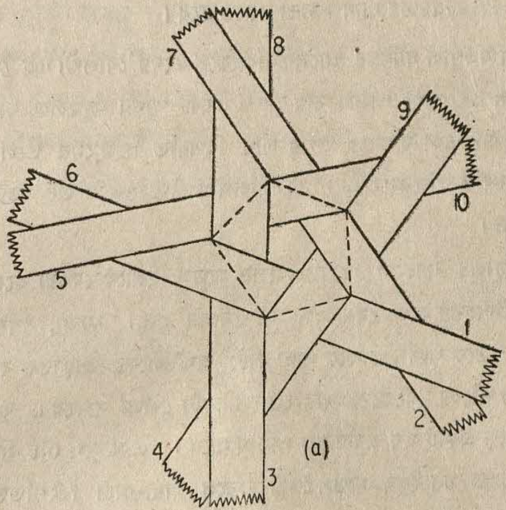
+ 12টি পঞ্চভুজের উপর পিরামিড অর্থাৎ প্রত্যেকটি উপরিস্থ তলের উপর পিরামিডগুলি অবস্থিত হয়ে তারকার ন্যায় ঘনবস্তুর বহুতলক সৃষ্টি হয়েছে

+ 30টি কীল-সদৃশ চার-তলক যা তৈরী হয়ে তারকাসদৃশ বহুতলককে পুনরায় বৃহত্তর দ্বাদশ-তলককে পূর্ণ করেছে

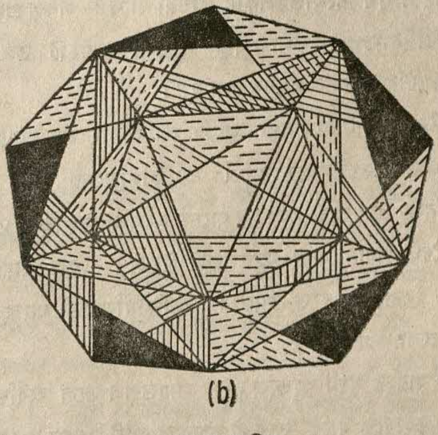
+ 20টি দুইটি ত্রিভুজের উপর দাঁড়ান পিরামিড এবং এরা তারকাসদৃশ দ্বাদশ-তলককে সম্পূর্ণ করতে সাহায্য করেছে

= সর্বমোট 63টি অঞ্চলের সীমা নির্ধারিত হয়েছে।

কোন কোন দিকে খোলা অঞ্চলগুলি নির্দেশিত করবার জন্য সঠিক শৃঙ্খলিত করবার মডেলটি হবে স্বর্ণময় দ্বাদশতলক এবং সেজন্য 7.47 নং চিত্র দ্রষ্টব্য।



(a)



(b)

7.47 নং চিত্র

মডেলটি তৈরী করতে 5টি পাতের প্রত্যেকটিতে 11 ত্রিভুজের প্রত্যেকের শীর্ষকোণ 108° কোণ করে নেওয়া হল। এক্ষেত্রে একটি পাত অতিরিক্ত নেওয়া হয়েছে যাতে উপরে জুড়ে দেওয়া যেতে পারে। 11টি ত্রিভুজ থাকাতে 6 জোড়া সমান্তরাল তল

রয়েছে এবং জোড়াগুলির অন্তর্বর্তী অঞ্চলগুলি একটি সর্বান্তর্বর্তী অঞ্চল হিসাবে সুষম দ্বাদশতলক সৃষ্টি করবে। স্বর্ণময় দ্বাদশতলকের মডেল তৈরী করতে আমাদের 5টি পাত নিয়ে 7.47(a) চিত্রের ন্যায় বিন্যস্ত করতে হবে।

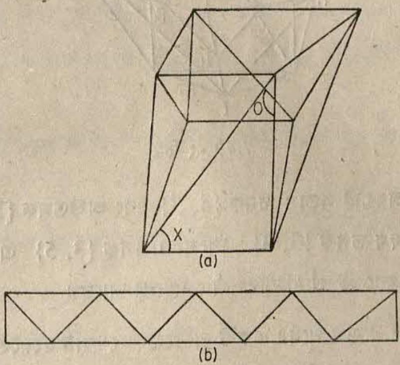
এর আগে যতগুলি ঘনবস্তুর আলোচনা হয়েছে এদের বৈশিষ্ট্য এই যে প্রত্যেকটি $\{p, q\}$ বহুতলকের ক্ষেত্রে পাওয়া যায় অপর একটি পাল্টা বহুতলক যার ধারগুলির সংখ্যা h এবং এর একটির অন্তর অপর শীর্ষ বিপরীত প্রিজ্‌মের তলে অবস্থিত। ঘনক এবং বিংশতি তলকের ক্ষেত্রে শীর্ষগুলি বিপরীত প্রিজ্‌ম এর তলগুলি $\{q, p\}$ বহুতলকের তল।

যে মডেলগুলির উদাহরণ উপরে শৃঙ্খলিত মডেল হিসাবে দেওয়া হয়েছে, তাহাই মাত্র সম্ভবপর উদাহরণ বলে যেন ধরে না নেওয়া হয়। কারণ, স্পষ্টতঃই চারটি সরল সোজা পাতকে শৃঙ্খলিত করে মাথা কাটা অষ্টতলকের আকৃতির বস্তু গঠন করা যায়। অবশ্য শীর্ষের বর্গক্ষেত্রের পরিবর্তে সেদিকটা খোলা থাকবে। কাজেই কাটা দুইটি মাথা জুড়ে একটি পূর্ণ অষ্টতলক পাওয়া যাবে। একইরূপে 6টি সরল পাতের সাহায্যে শৃঙ্খলিত ঘন বস্তুর মডেল তৈরী করলে মাথা-কাটা বিংশতিতলক পাওয়া যাবে। এক্ষেত্রেও সুষম পঞ্চভুজের পরিবর্তে সে জায়গা ফাঁকা থাকবে। কাটা অংশগুলি জুড়ে দিয়ে অবশ্যই সম্পূর্ণ বিংশতিতলকটি পাওয়া যাবে। সকল প্রকার শৃঙ্খলিত ঘন বহুতলক নির্ণয় করা নিশ্চিতই কষ্টসাধ্য যখন বহুতলকের দুইটি তল সমান্তরালভাবে অবস্থিত অর্থাৎ প্লেটোর বহুতলক যাদের বলা হয়।

সত্যিকার কঠিন আহ্বান হবে যখন আমরা আর্কিমিডিসের বহুতলকের শৃঙ্খলিত পাতের সাহায্যে মডেল তৈরী করতে যাব। আর্কিমিডিসের 13টি ঘন বস্তু আছে। আর্কিমিডিসের ঘনবস্তু তাদেরই বলা হয় যাদের সবগুলি উপরিস্থ তল সুষম বহুভুজ অর্থাৎ ধারগুলির দৈর্ঘ্য সমান এবং বহুতলকটি উত্তল। কিন্তু ধারগুলি কোন শীর্ষ-বিন্দুতে একইরূপে বিন্যস্ত না হতে পারে। আর্কিমিডিসের ঘনবস্তুর কি শৃঙ্খলিত পাতের সাহায্যে মডেল করা সম্ভব?

যদি p সংখ্যক ধারযুক্ত সুষম বহুভ্‌জ দুইটি সমান্তরাল তলে অবস্থিত হয়ে প্রতি-সাম্যের অক্ষরেখার দুইদিকে থাকে, তবে ঐ বহুভ্‌জ দুইটি প্রিজম্ এর দুই বিপরীত তল সৃষ্টি করতে পারে। কিন্তু যদি একটি বহুভ্‌জকে স্থির রেখে অপর সুষম বহুভ্‌জকে প্রতিসাম্য অক্ষের চারদিকে $\frac{\pi}{p}$ সমান কোণের মান পরিমাণ ঘুরিয়ে পরে একটি বহুভ্‌জের প্রত্যেকটি শীর্ষবিন্দুকে অপর সুষমবহুভ্‌জের নিকটতম দুইটি শীর্ষবিন্দুতে

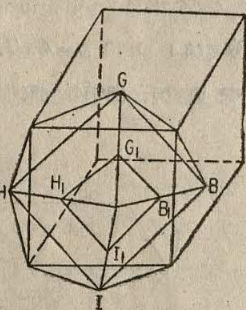
দুইটি ধার দিয়ে যোগ করি আমরা $(2p)$ সংখ্যক সমবাহু ত্রিভুজের আঙ্টি দিয়ে একটি বিপরীত প্রিজ্‌ম্ সৃষ্ট পাব। $(2p)$ সমবাহু ত্রিভুজ অবশ্য দুইটি বহুভুজের যোগের ফলে সৃষ্ট হয়েছে। আমরা আগে যেরূপ চিন্তা করেছিলাম, যদি বহুভুজ দুইটির অপনয়ন করা হয়, আমরা একটি চোঙের মত বস্তু পাই যাকে কেটে ছোট ছোট ত্রিভুজাকার পাত পাওয়া যেতে পারে। যদি ত্রিভুজকে দ্বিখণ্ডিত করা যায় তবে আয়তক্ষেত্রাকার জাল সৃষ্টি হবে। যখন $p=4$, 7.48 নং চিত্রে অবস্থা বুঝা যাবে। যে কোণগুলি নির্দেশিত হয়েছে, সেগুলি দেখে বুঝা যাবে যে রেখাচিত্রটি সরল।



7.48 নং চিত্র

আমরা এখন উপরের পাতগুলি জুড়ে একটি খোলা কাঠামো তৈরী করতে চাই যাতে সুষম বহুতলকের প্রতিসাম্য বজায় থাকে। এরূপ কাঠামো যে ঘনক তা বেশ সহজেই কল্পনা করা যায়। কাজেই এই ঘন বস্তু দিয়েই সুরু করা সমীচীন হবে। একটি সুষম ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হতে ঘনকের কোন বর্গাকার তলের শীর্ষবিন্দুগুলিকে যোগ করে যে ধারগুলি পাওয়া যায় তাদের মধ্যবিন্দুগুলি অপর একটি বহুতলকের শীর্ষবিন্দু সৃষ্টি করে। এরূপ বহুতলককে অর্ধসুষম ঘনক-অষ্টতলক বলা চলে। যদি এই ঘনবস্তুকে $\sqrt{2}$ গুণ আকারে বর্ধিত করা যায়, এর বর্গাকার তলগুলি ঘনকের তলের সঙ্গে অভিন্ন হবে এবং প্রত্যেকটি তলই 7.48 চিত্রের ন্যায় অপর তলের সমান্তরাল হবে। 7.49 চিত্র দ্রষ্টব্য। $B_1I_1H_1G_1$ ঘনক-অষ্টতলকের বর্গাকার উপরিস্থ তল।

অবশ্যই $\{p, q\}$ পাঁচটি সুষম বহুতলক আছে। তারা যথাক্রমে চতুস্তলক $\{3, 3\}$, ঘনক $\{4, 3\}$, অষ্টতলক $\{3, 4\}$, দ্বাদশতলক $\{5, 3\}$ এবং বিংশতিতলক $\{3, 5\}$। যে সব বহুতলকের ক্ষেত্রে $\{p, q\}$ এবং $\{q, p\}$ একইরূপ সেগুলি নিম্নরূপ : চতুস্তলক



7.49 নং চিত্র

$\{3, 3\}$ এর ক্ষেত্রে অবশ্যই সত্য ; ঘনক $\{4, 3\}$ এবং অষ্টতলক $\{3, 4\}$ এবং ঘনক-অষ্টতলক $\left\{\begin{smallmatrix}3\\4\end{smallmatrix}\right\}$; দ্বাদশ-তলক $\{5, 3\}$, বিংশতিতিলক $\{3, 5\}$ এবং বিংশতিতলক-দ্বাদশতলক $\left\{\begin{smallmatrix}3\\5\end{smallmatrix}\right\}$। কাজেই পাঁচটি বিপরীত প্রিজম্ আছে।

আলোর ঢাকনার মডেল পূর্বের একটি পরিচ্ছেদে দেখান হয়েছে। পূর্বে আলোচিত খোলা মডেলগুলি আলোর ঢাকনা হতে পারে। গ্রন্থপঞ্জীতে পলিয়া [13] এবং কাণ্ডির [14] নাম বিশেষভাবে উল্লেখ্য।

প্রশ্নমালা

1. এরূপ ঘনবস্তুর বিবরণ দাও যার 5টি শীর্ষবিন্দু আছে এবং যার 6টি ত্রিভুজাকার উপরিস্থ তল আছে।

2. দেখাও যে 6টি সর্বসম রম্বস যার কোণগুলি 60° এবং 120° জুড়ে দিয়ে একটি রম্বস-বহুতলক গঠন করা যায়।

3. রম্বস্-দ্বাদশতলকের উপরিস্থ তলের কোণগুলির মান নির্ণয় কর যেখানে একটি শীর্ষবিন্দুতে 4টি রেখা মিলিত হয়েছে। অনুরূপ রম্বস্ বহুতলকের কোণগুলির মান নির্ণয় কর যেখানে 6টি ধার মিলিত হয়েছে।

4. $F-E+V=2$ সূত্রটি ব্যবহার করে প্রমাণ কর যে সামন্তরিক দিয়ে পরিসীমিত বহুতলকের $n(n-1)$ উপরিস্থ তল আছে, যেখানে n ধারগুলির সংখ্যা, যেগুলি বিভিন্ন দিকে প্রসারিত।

5. প্রমাণ কর যে 12টি তলের গোটানসাধ্য বহুতলকে, উপরিস্থ সুষম বহুভুজের বাহুর সংখ্যা হবে 6 যদি এটি অক্ষরেখীয় গোটানসাধ্য-বহুতলক হয়। অনুরূপ প্রমাণ কর যে গোটানসাধ্য-বিংশতি-তলকের ক্ষেত্রে 8টি বাহু দরকার হয়।

6. দেখাও যে প্লেটোর ঘনবস্তুগুলি সরল কাগজের পাত হতে শৃঙ্খলিত করে পাওয়া যায়।

7. দেখাও যে $(2n)$ শীর্ষবিন্দু, $(6n)$ ধারের সংখ্যা এবং $4n$ ত্রিভুজের সংখ্যা নিয়ে, n এর মান 6, 8 বা 9 ইত্যাদিতে সুন্দর সুন্দর বহুতলকের মডেল গঠন করা যায়। অবশ্য $(6n)$ সংখ্যক ধারের মধ্যে $(2n)$ সংখ্যায় ধারগুলি জোড়ায় জোড়ায় মিলিত হতে পারে।

8. কতকগুলি চতুস্তলককে কয়েকটি ঘনকের সঙ্গে যুক্ত করে একটি ঘোরান আঙটি তৈরী কর।

9. $\{3, 3\}$ ঘন বস্তুর ক্ষেত্রে পূর্বে বর্ণিত পথে দেখাও যে $h=4$, প্রস্থ $=\frac{1}{\sqrt{2}}$ দৈর্ঘ্য $=6$ এবং ধারের সংখ্যা 4। অনুরূপ দেখাও যে $\{3, 4\}$ এর ক্ষেত্রে $h=6$, প্রস্থ $=1$, দৈর্ঘ্য $=6$ এবং ধারের সংখ্যা 8।

In scientific training the first thing to do with an idea is to prove it. But allow me for one moment to extend the meaning to prove ; I mean to prove its worth.... The solution which I am urging is to eradicate the fatal disconnection of subjects which kills the vitality of our modern curriculum. There is only one subject matter for education and that is life in all its manifestations. Instead of this single unity we offer children Algebra, from which nothing follows ; Geometry from which nothing follows ; Our course of instruction should be planned to illustrate simply a succession of ideas of obvious importance.

—Whitehead

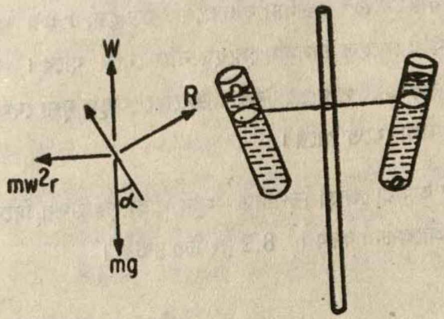
গ্রন্থপঞ্জী :

1. কোক্সিটার, এইচ্. এস্. এম্—Introduction to Geometry (জন্ ওয়াইলি এণ্ড্ সন্স্) (1962)
2. হকিন্স্, এ. এফ্., হিল্, এ.সি., রীভ্., জে.ই. এবং টিরেল্, জে.এ.— [1] 50 (1966) পৃঃ 140-144।
3. স্পন্, ডব্লিউ. জি.—[2] 79 (1972) পৃঃ 57-59।
4. স্মিথ্, এ.—[1] 57 (1973) পৃ: 39-46 ; পৃঃ 303-306।
5. ব্যাকোস্, টি.—[1] 43 (1958) পৃঃ 17-20।
6. কাণ্ডি, এইচ্. এম্ এবং রোলেট্, এ.পি.—Mathematical models (অক্সফোর্ড) (1952)
7. পারগেটার্, এ. আর—[1] 43 (1959) পৃঃ 88-101।
8. কোক্সিটার্, এইচ. এস. এম—1 নং সূচী।
9. পেডার্সন্, জে. জে.—[1] 62 (1978) পৃঃ 15-18।
10. নিউম্যান্, জে. আর্.—The World of Mathematics (সাইমন্ এণ্ড্ সুস্টার, নিউইর্ক্) (1956)
11. পিটার্স্, জে. এম্. এইচ্.—[1] 62 (1978) পৃঃ 197-198।
12. পেডারসন্, জে. জে.—[1] 62 (1978) পৃঃ 250-262।
13. পলিয়া, জি.—Induction and Analogy in Mathematics—ভল্যুম 1, Mathematics and Plausible reasoning (প্রিন্স্টন্) (1954) পৃঃ 43-52।
14. কাণ্ডি, এইচ্. এম্.—[1] 61 (1977) পৃঃ 182-183।

অষ্টম পরিচ্ছেদ

জ্যামিতির উদ্দেশ্য ব্যতীত জ্যামিতির ফলিত প্রয়োগ।

1. আমরা প্রথমে বলবিদ্যায় ফলিত প্রয়োগ দেখাব। এগুলিকে অনেক সময় অদ্ভুত ও আশ্চর্যজনক বলে মনে হয়। কিন্তু এগুলি বেশ পরিচিত। আমরা দুইটি পরীক্ষানলক পাত্র অক্ষের দুইদিকে সমান কোণ উৎপন্ন করে আটকে দিলাম। 8.1নং চিত্র দ্রষ্টব্য। দুইটি নলপাত্রেই জল নিয়ে নেওয়া হয়েছে। জলের ভিতর একটি নলে কর্ক ও অপর নলে পাথরের টুকরা ফেলে দেওয়া হল। কর্কটি স্বভাবতঃই প্রথমে ভাসবে এবং পাথরের টুকরাটি ডুবে যাবে। প্রথম অবস্থায় যখন নলগুলি সাম্যাবস্থায়



8.1 নং চিত্র

আছে কর্কটি ভেসে থাকবে এবং পাথরের টুকরাটি ডুবে থাকবে। এখন নল দুটিকে যথেষ্ট জোরে ঘোরাতে শুরু করা হল। ঘোরানর ফলে কর্কটি জলের নীচে ডুবে যাবে এবং পাথরের টুকরাটি ভেসে উঠবে। এরূপ হওয়ার কারণ নিম্নরূপ। ধরা যাক α কোণ নলটি ঘোরানর অক্ষের সঙ্গে উৎপন্ন করেছে। r = অক্ষ হতে পরীক্ষা নলকটি যেখানে ধরে রাখা আছে তার দূরত্ব। m = পাথরের টুকরাটির ভর। W = পাথরের টুকরাটি যতটা জল অপসারিত করেছে তার ওজন। R = পরীক্ষা নলকের দেওয়ালের গায়ের প্রতিক্রিয়া বল। f = পরীক্ষানলকের দৈর্ঘ্যের দিকে ত্বরণ জলটি ঘোরানহেতু। ω = নলটি ঘোরানর কৌণিক বেগ। বলবিদ্যার সাম্যাবস্থার সূত্র প্রয়োগ করে পাই

$$(W - mg)\cos\alpha + m\omega^2 r \sin\alpha = mf \quad \dots \quad (8.1)$$

নলের দৈর্ঘ্যের দিকে বলের বিভাজন করে (8.1) পাওয়া গিয়েছে। এখন পাথরের টুকরার ক্ষেত্রে

$$W << mg \text{ (ধরা যাক } m_2 g\text{)}।$$

f ধনাত্মক হতে পারে যদি

$$(W - m_2 g)\cos \measuredangle + m_2\omega^2 r \sin \measuredangle > 0$$

অর্থাৎ

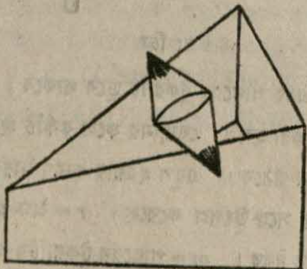
$$\tan \measuredangle > \frac{m_2 g - W}{m_2 \omega^2 r} \text{।} \qquad \ldots \qquad \ldots \quad (8.2)$$

নির্বাধ তলের আকৃতি নলের ভিতর অধিবৃত্তের আকৃতি নেয় ঘোরানর জন্য। তলের সমীকরণ

$$r^2 = \frac{2g}{\omega^2}\, z \text{।} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \quad (8.3)$$

(8.3) হতে দেখা যায় যে ω^2 এর মান যদি যথেষ্ট বড় হয়, r এর মান নির্বাধ তলে কম হবে অর্থাৎ বর্কাট যেহেতু ভাসমান সেহেতু নীচে নেমে যাবে। সুতরাং জোরের সঙ্গে ঘূর্ণনের ফলে বর্ক এবং পাথরের টুকরার উপরোক্ত অদ্ভূত দৃশ্য দেখা দেয়। এরূপ যন্ত্রকে কেন্দ্রাতিগক বলা যেতে পারে।

1.1 এরপরে আমরা জোড়া বিপরীত শঙ্কুর পাহাড়ের উপর দিকে আপনা হতে উঠে পড়ার প্রশ্নটি আলোচনা করব। 8.2 নং চিত্র দ্রষ্টব্য।



8.2নং চিত্র

দুইটি কাঠের রেল 8.2 নং চিত্রের ন্যায় করা হয়েছে। রেলগুলির উন্নতি ক্রমশঃ উপরেরর দিকে বেড়ে যাচ্ছে এবং রেলগুলির পারম্পারিক দূরত্বও বর্ধিত হয়ে যাচ্ছে একই সঙ্গে যদিও প্রথমে কোন দূরত্বই ছিল না। গড়িয়ে যাওয়ার বস্তুটি দুইটি সর্বসম সরল শঙ্কু জোড়া করে তৈরী করা বলা যেতে পারে। যখন শঙ্কুর শীর্ষকোণের মান, রেলগুলির অন্তর্বর্তী কোণ এবং রেলগুলির সহিত দিগন্তের কোণের মানের সঙ্গে কোন

বিশেষ অসমীকরণের যোগ থাকে জোড়া সরল শঙ্কুটি উপরের দিকে উঠতে থাকবে।

ধরা যাক

α = শঙ্কুর শীর্ষে উৎপন্ন কোণের অর্ধ,

β = রেলগুলির অন্তর্বর্তী কোণ,

γ = সমান্তরালের অপেক্ষা রেলগুলির উন্নতি।

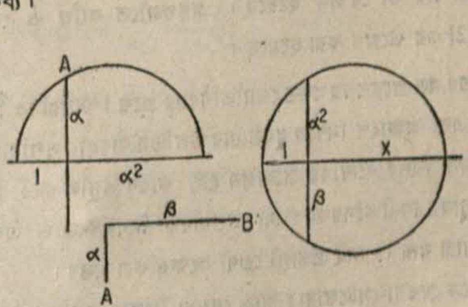
যদি f রেলের তলের সমান্তরাল দিকে শঙ্কুর ত্বরণ হয় এবং R রেলের প্রতিক্রিয়ার বল হয়ে থাকে, বলবিদ্যার সূত্র দিয়েছে

$$\left.\begin{aligned} mf &= mg \sin\gamma + 2R \sin\beta \cos\alpha, \\ mg &= 2R \sin\beta \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (8.4)$$

যদি $\sin\gamma < \cot\alpha \sin\beta$ হয়, f ত্বরণ রেলের উপর দিকে হবে। অতএব শঙ্কুর অদ্ভুত আচরণের ব্যাখ্যা পাওয়া গেল।

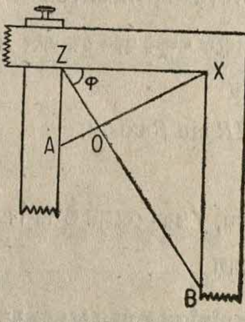
2. আমরা এখন এখানে জ্যামিতির আদিম যুগের, যখন কোন যন্ত্রগণক ছিল না সে সময়ের ফলিত প্রয়োগ দেখাব। কিন্তু প্রচেষ্টা হিসাবে প্রাচীনকালে গ্রীকগণের খৃষ্টপূর্ব তৃতীয় শতকে কিরূপ বৈজ্ঞানিক প্রতিভা ছিল তা প্রত্যক্ষ হবে। এটি একটি যান্ত্রিক কৌশল যা দিয়ে একটি সংখ্যার ঘনমূল নির্ণয় করা যেতে পারে। এই ঘনমূল গ্রীকদের দরকার হত অভিক্ষেপের পাথরের আকার নির্ণয়ের জন্য। এরূপ পাথর প্রায়ঃশই যুদ্ধবিগ্রহে ক্ষেপণীযন্ত্রে ব্যবহৃত হত।

ধরা যাক x সংখ্যাটির ঘনমূল নির্ণয় দরকার। আমরা একটি OA রেখা টানলাম যার দৈর্ঘ α এবং $OB = \beta$ রেখা OA এর লম্ব। $\beta = \frac{x}{\alpha^2}$ নির্বাচিত করে নিলাম। 8.3 নং চিত্র দ্রষ্টব্য।



8.3 নং চিত্র

আমরা L-আকৃতির কাঠের একটি পাত নিলাম। এবং এর একদিকে একটি পাত অপসরমান এবং একটি হাতের উপর অবস্থিত এবং এটিকে আটকানর বন্দোবস্ত আছে। 8.4 নং চিত্র দ্রষ্টব্য। AZ অপসরণযোগ্য পাত এবং ZXY, L-আকৃতির পাত। ধরে নিলাম $AO = \alpha$, $BO = \beta$। AZ কে XY এর সমান্তরাল রেখে



8.4 নং চিত্র

সরান হল। যদি AZকে এমনভাবে স্থাপিত করা হল যে BO, AO যথাক্রমে Z, X বিন্দু দিয়ে যায়, তবে দেখান যাবে যে $OZ = \sqrt[3]{x}$। স্পষ্টতঃই AZX সমকোণী ত্রিভুজ এবং যেহেতু OZ রেখা AX রেখার উপর লম্ব হওয়া

$$OZ^2 = AO \cdot OX = \alpha \cdot \beta \cot \varphi = \alpha\beta \cdot \frac{\alpha}{OZ}$$

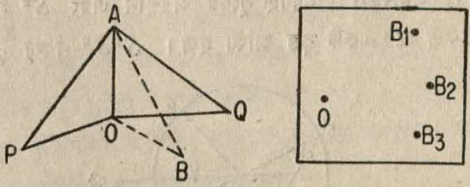
বা $OZ^3 = \alpha^2 \cdot \frac{x}{\alpha^2} = x$ অর্থাৎ $OZ = x^{\frac{1}{3}}$। ... (8.5)

সম্পূর্ণ প্রচেষ্টাটি গ্রীকগণের গণিতের প্রতি অন্তর্দৃষ্টি দেখাচ্ছে এবং কিরূপ গণিতের ফলিত প্রয়োগ করা যায় তা দেখান হয়েছে। গ্রন্থপঞ্জীতে কাণ্ডি ও রোলেট্‌ [1], মেডেল ও ফলি [2] এর উল্লেখ করা হয়েছে।

3. জ্যামিতির বড় প্রয়োগের ক্ষেত্র জ্যোতির্বিদ্যার প্রশ্নে। উত্তরদিক নির্ণয়ের জন্য ধ্রুবতারার ব্যবহার এবং অক্ষাংশ নির্ণয়ে ধ্রুবতারার উন্নতির ব্যবহার সুপরিচিত। কিন্তু এইগুলি নির্ণয়ের জন্য বিশদ বন্দোবস্ত প্রয়োজন হয়, কারণ এগুলি রাত্রে নির্ণয় করতে হয়। বিকল্পে সূর্যের নিরীক্ষণের সাহায্যে উত্তরদিক নির্ণয় করতে এবং অক্ষাংশ নিরূপণ করতেও পারা যায়। এই প্রণালী শ্রেণী কক্ষেও করা সম্ভব।

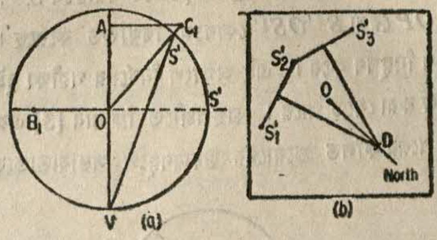
যন্ত্রটি দুইটি জুড়ে দেওয়া সেটস্কোয়ার আঠা দেওয়া ফিতার সাহায্যে এবং একটি স্থির সমতলের উপর দাঁড় করিয়ে রাখা হয়েছে। 8.5 নং চিত্র দ্রষ্টব্য।

AO রেখা উল্লম্ব। দিনের যে কোন তিনটি সময়ে, যখন সূর্য দৃশ্যমান তখন A বিন্দুর সমতলে ছায়া B বিন্দু চিহ্নিত করা হল। ধরা যাক B বিন্দুর অবস্থান তিন সময়ে



8.5 নং চিত্র

তিনটি যথাক্রমে B_1, B_2, B_3। OAB_1 তলে একটি বৃত্ত আঁকা হল। AC_1 রেখা OB_1 এর সমান্তরাল করে টানা হল এবং $AC_1 = OB_1$ কেটে নেওয়া হল। 8.6 নং চিত্র দ্রষ্টব্য।



8.6 নং চিত্র

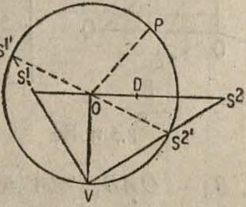
OC_1 রেখা B_1O এর সহিত যে কোণ উৎপন্ন করে তা সূর্যের উন্নতির সমান। কারণ, সূর্যের উন্নতি যদি α হয়,

$$\tan \alpha = \frac{AO}{BO} = \frac{AO}{AC}\text{।}$$

যদি VS' রেখা B_1O এর বর্ধিতাংশকে S'_1 বিন্দুতে ছেদ করে, আমরা অনুরূপভাবে S'_2, S'_3 বিন্দু দুইটি B_2, B_3 এর জন্য পেতে পারি। S'_1, S'_2, S'_3 এর কেন্দ্র D বিন্দু। স্পষ্টতঃই D বিন্দু উত্তর মেরুবিন্দু এবং শিরোবিন্দুর তলে অবস্থিত, কারণ সূর্য মেরুবিন্দুর দিককে অক্ষ রেখে প্রদক্ষিণ করছে। প্রতিসাম্য থাকার জন্য D বিন্দু দিগন্ত এবং উত্তর দিকে অবস্থিত, অর্থাৎ OD উত্তর দিক নির্দেশ করেছে।

আমরা এখন স্থানটির অক্ষাংশ নির্ণয় করতে পারি। 8.7 নং চিত্র দ্রষ্টব্য। D বিন্দুকে কেন্দ্র করে DS'_1 ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকলাম। OD রেখাকে উভয়

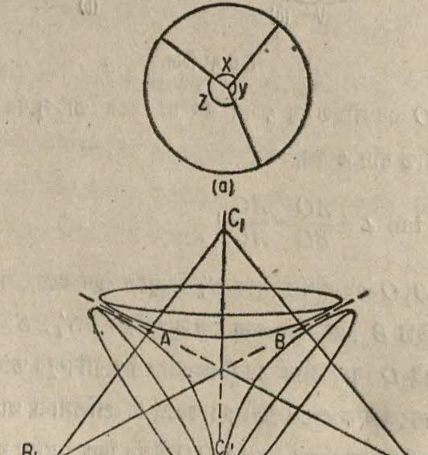
দিক বর্ধিত করা হল। এই বর্ধিত রেখা বৃত্তটিকে S^1, S^2 বিন্দু দুইটিতে ছেদ করে। S^1, S^2 বিন্দু দুইটি যথাক্রমে সূর্যের মেরু বিন্দুর উত্তর এবং দক্ষিণ প্রান্তের অবস্থান নির্দেশ করে। অর্থাৎ S^1 মধ্যাহ্ন সূর্যের অবস্থান এবং S^2 মধ্যরাত্রে অবস্থান। O বিন্দুকে কেন্দ্র করে একটি বৃত্ত আঁকা হল। S^1S^2 বিন্দু দুইটি OD রেখার



8.7 নং চিত্র

উপর অবস্থিত। VS^1, VS^2 রেখা দুইটি বৃত্তটিকে যথাক্রমে $S^{1\prime}$, $S^{2\prime}$ বিন্দু দুইটিতে ছেদ করে। OP রেখা $S^{2\prime}OS^{1\prime}$ কোণকে দ্বিখণ্ডিত করেছে। $\angle DOP$ কোণ স্থানের অক্ষাংশ নিরূপণ করে। এই অক্ষাংশ নির্ণয়ের পরীক্ষা দুই বা তিন ঘণ্টা ধরে প্রেক্ষণের কাজে করা যেতে পারে। গ্রন্থপঞ্জীতে ফ্রিম্যান [3] এর উল্লেখ করা হল।

4. এর পরের ফলিত প্রয়োগের উদারণরূপে সম্ভাব্যতাতত্ত্বে প্রয়োগ দেখাব।



8.8 নং চিত্র

আমাদের একটি বৃত্তের পরিসীমায় তিনটি বিন্দু নিতে হবে যাতে ঐ তিনটি বিন্দু যোগ করলে যে ত্রিভুজ পাওয়া যাবে সেটির বৃত্তের কেন্দ্র কোন অন্তঃস্থ বিন্দু হবে। 8.8 নং চিত্র দ্রষ্টব্য।

ধরা যাক $2\pi x$, $2\pi y$, $2\pi z$ কোণ তিনটি ত্রিভুজের বাহুগুলি কেন্দ্রে উৎপন্ন করে। 2π এর সঙ্গে কোণ তিনটির অনুপাত যথাক্রমে x, y, z। অতএব স্পষ্টতঃ

$$0<x<\tfrac{1}{2},\ 0<y<\tfrac{1}{2},\ 0<z<\tfrac{1}{2},\ x+y+z=1 \quad \ldots \quad (8.6)$$

যেহেতু বৃত্তকেন্দ্র পরিসীমায় থাকলে একটি কোণের মান সমকোণ এবং কেন্দ্রস্থ কোণ দুই সমকোণ। অতিরিক্ত শর্তগুলি নিম্নরূপ ঃ

$$x^2+y^2<z^2,\ z^2+x^2<y^2,\ y^2+z^2<x^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad (8.7)$$

যেহেতু ত্রিভুজের তিনটি কোণই সূক্ষ্মকোণ। ABC ত্রিভুজের $A_1B_1C_1$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$। AB_1C ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নিম্নরূপে পাওয়া যেতে পারে ঃ

ধরা যাক $x=r,\ y=r\sin\varphi,\ z=r\cos\varphi,\ x+y+z=1 \quad \ldots \quad (8.8)$

অতএব $\frac{1}{r}=1+\cos\varphi+\sin\varphi$। যদি $r=\frac{1}{2}$, $\varphi=0, \frac{\pi}{2}$। কাজেই AB_1C

$$\text{ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল} = \sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{(1+\cos\varphi+\sin\varphi)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\left(\cos^2\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^1\frac{(1+x^2)dx}{(1+x)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\left[1-\log_e^2\right] \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (8.9)$$

অতএব ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\left[1-3\,(1-\log_e^2)\right]$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\left[3\log_e^2-2\right]। \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (8.10)$$

কাজেই বৃত্তের তিনটি বিন্দু যোগ করে সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ আঁকবার সম্ভাব্যতাঙ্ক $(3\log_e^2-2)\backsimeq{\cdot}0793$। সম্ভাব্যতাঙ্কের মান 8% যা অত্যন্ত কম। আমরা সম্ভাব্যতাঙ্কের মান আরও কম পাব যদি সূক্ষ্মকোণগুলির মান আরও নির্দিষ্ট করে দেওয়া হয়। গ্রন্থপঞ্জীতে বাডেন [4] ক্লেচার [5] এর উল্লেখ করা হয়েছে।

4.1 এখন জ্যামিতির সাহায্যে স্থূলকোণী ত্রিভুজ, অর্থাৎ সবগুলি কোণ সূক্ষ্মকোণ নহে, আঁকবার সম্ভাব্যতাঙ্ক নির্ণয় করব। যে কোন ত্রিভুজের কোণের মানগুলি X, Y, Z হলে

$$0<X,\ Y<\pi,\ 0<X+Y<\pi,\ X+Y+Z=\pi \qquad \ldots \quad (8.11)$$

অর্থাৎ

$$-1<\cos X,\ \cos Y<1,\ \cos X+\cos Y>0 \qquad \ldots \quad (8.12)$$

যেহেতু $X<\pi-Y$ এবং cos-ফাংশন ক্রমাবনতির দিকে গিয়েছে $(0, \pi)$ অঞ্চলের মধ্যে ত্রিভুজটি সূক্ষ্মকোণী হতে হলে

$$X,\ Y<\frac{\pi}{2} \text{ এবং } X+Y>\frac{\pi}{2} \qquad \ldots \qquad \ldots \quad (8.13$$

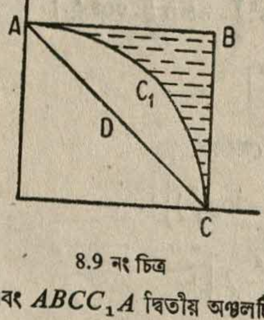
অর্থাৎ, $\cos X, \cos Y > 0$ এবং $\cos^2 X+\cos^2 Y < 1 \qquad \ldots \quad (8.14)$

যেহেতু $\cos X < \cos\left(\frac{\pi}{2}-Y\right)$ বা, $\cos X < \sin Y$ অর্থাৎ $\cos^2 X < \sin^2 Y$।

অতএব স্থূলকোণী ত্রিভুজের সম্ভাব্যতাঙ্ক নির্ণয় করবার জন্য দুইটি ক্ষেত্রফলের অনুপাত নির্ণয় করা প্রয়োজন এবং সেই দুইটি ক্ষেত্র

$$\left.\begin{array}{l} -1<x,\ y<1,\ x+y>0 \\ \text{এবং} \quad x,\ y>0,\ x^2+y^2>1 \end{array}\right\} \qquad \ldots \qquad \ldots \quad (8.15)$$

8.9 নং চিত্র দ্রষ্টব্য।



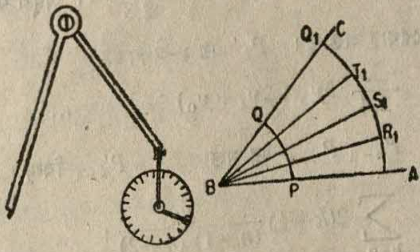
8.9 নং চিত্র

প্রথম অঞ্চল টি $ABCDA$ এবং $ABCC_1A$ দ্বিতীয় অঞ্চলটি।

$$\text{ক্ষেত্রফল দুইটির অনুপাত} = \frac{1-\pi \cdot 1^2/4}{1/2} = 2\left(1-\frac{\pi}{4}\right) \simeq \cdot 429\text{।}$$

বৃত্তের উপর, কেন্দ্র অন্তঃস্থ বিন্দু রেখে, অঙ্কিত ত্রিভুজ আঁকবার সম্ভাব্যতা এবং যে কোন সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ আঁকার সম্ভাব্যতার পার্থক্য লক্ষ্যণীয়।

5. আমরা এখন একটি খুবই সহজ জ্যামিতিক যন্ত্র উদ্ভাবনী দেখাব যার দ্বারা বৃত্তচাপ নির্দিষ্ট মানে বিভক্ত করা যেতে পারে। ছাত্রছাত্রীরা অনায়াসেই এটি তৈরী করে নিতে পারে। স্পষ্টতঃই এর প্রয়োগ ক্ষেত্র কোন একটি কোণকে কয়েকটি সমান অংশে বিভক্ত করায়। এই যন্ত্রে সাধারণ কম্পাস যন্ত্রে পেন্সিলের পরিবর্তে একটি চাকা লাগান হল যেটি এই চাকার কেন্দ্রের চারদিকে ঘুরতে পারে। চাকাটি কাগজের তলের উপর লম্বভাবে থেকে ঘুরবে। চাকাটির ধার এরূপভাবে খাঁজকাটা আছে যে এটি কাগজের উপর সরে না গিয়ে গড়িয়ে যায়। চাকাটির পরিসীমার একটি বিন্দুর উপর শূন্য চিহ্ন অঙ্কিত থাকে। 8.10 নং চিত্র দ্রষ্টব্য।



8.10 নং চিত্র

ধরা যাক ABC একটি নির্দিষ্ট কোণ যাকে n অংশে বিভক্ত করতে হবে। B বিন্দুকে কেন্দ্র করে এবং $n.BP$ ব্যাসার্ধ নিয়ে P_1Q_1 বৃত্তচাপ অঙ্কিত হল। বৃত্তচাপ বিভাজকটিকে নিয়ে তার শূন্য চিহ্ন P বিন্দুতে রাখা হল। তারপর চাকাটি যখন গড়িয়ে Q বিন্দুতে এসে পৌঁছেছে সেই অবস্থায় চাকার নির্দেশকের অবস্থান লক্ষ্য করা হল। এখন পুনরায় চাকার শূন্য অঙ্কিত স্থান P_1 বিন্দুর উপর স্থাপন করে P_1Q_1 উপর গড়িয়ে নিয়ে PQ সমান চাকার অবস্থানে পৌঁছলে সেই বিন্দুটিকে R_1 আখ্যা দেওয়া হল। R_1 হতে অগ্রসর অনুরূপভাবে S_1, T_1,··· ইত্যাদি অবস্থান চিহ্নিত করা হল। BR_1, BS_1, BT_1, ··· ইত্যাদি সরলরেখা দিয়ে যোগ করা হল। BR_1, BS_1, BT_1, ··· ইত্যাদি বিভাজক ব্যাসার্ধ হল, কারণ,

$$\angle P_1BR_1 = \frac{P_1R_1}{BP_1} = \frac{PQ}{BP_1} = \frac{PQ}{n.BP} = \frac{\angle ABC}{n} \quad \cdots \quad (8.16)$$

উপরের যন্ত্রটি আগেকার বহুল প্রচলিত প্ল্যানিমিটার যন্ত্রের সরলীকৃত রূপ। চাকাটি লম্ব রাখার জন্য নীচে একটি অপসরমান তল রাখলে ও দুইটি ঘুরবার চাকা বা ঘূর্ণী ঐ চাকার সাথে যুক্ত থাকলে সঠিকভাবে চাকাটি সরসর করে না গিয়ে পাতার উপর ঘুরে যাবে। গ্রন্থপঞ্জীতে দিবেকর [6] এর নাম উল্লেখ করা হল।

6. আমরা এখন সংখ্যা মানের গণিত হতে উদাহরণ দেব। ধরা যাক একটি তলে n সংখ্যক বিন্দু অবস্থিত আছে এবং সেগুলি $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \cdots, (x_{n-1}, y_{n-1})$। আমরা একটি সরলরেখা এই বিন্দুগুলির মধ্য দিয়ে বা যতটা সম্ভব নিকট দিয়ে টানতে চাই। বিন্দুগুলিকে $P_0(x_0, y_0)$, $P_1(x_1, y_1), \cdots, P_n(x_n, y_n)$ দিয়ে নির্দিষ্ট করা হল। আপাততঃ x-অক্ষাঙ্কগুলিকে পরিবর্তিত করে $\frac{2kh}{3}$ $(k=1, 2, \cdots, n)$ করা হল। লক্ষ্যণীয় যে $x_1 - x_0 = h$, $x_2 - x_1 = h, \cdots, x_k - x_{k-1} = h$। ধরা যাক $P_1{}'$ বিন্দু P_0P_1 এর অন্তঃস্থ বিন্দু যার x-অক্ষাঙ্ক $\frac{2h}{3}$। অতএব $P_1{}'$ এর y অক্ষাঙ্ক $2.\ \frac{2y_1 + y_0}{2.3}$। এরূপ করা বিস্তৃত হলে, $P_2{}'$ বিন্দু P_1P_2 রেখার অন্তঃস্থ। $P_2{}'$ এর y-অক্ষাঙ্ক

$$\frac{2.}{3.4}(3y_2 + 2y_1 + y_0) \quad \cdots \quad \cdots \quad (8.17)$$

এইরূপে, $P'_{n-2}\, P_{n-1}$ এর অন্তঃস্থ $A = P'_{n-1}$ বিন্দু

$$\sum_{k=0} 2(k+1)\frac{y_k}{(n+1)\,(n+2)}, \quad \cdots \quad \cdots \quad (8.18)$$

কাজেই A বিন্দুর স্থানাঙ্ক

$$A\left[\frac{2nh}{3},\ \sum_{k=0}^{n} \frac{2(k+1)\,y_k}{(n+1)(n+2)}\right], \quad \cdots \quad (8.19)$$

অনুরূপে P_0 এর পরিবর্তে P_{n-1} দিয়ে সুরু করলে দুই তৃতীয়াংশ অনুপাত ব্যবহার করলে B বিন্দুর স্থানাঙ্ক

$$B\left[\frac{nh}{3},\ \sum_{k=0}^{n} \frac{2(k-1)\,y_{n-k}}{(n+1)(n+2)}\right] \quad \cdots \quad \cdots \quad (8.20)$$

AB রেখাকেই বলা হয় সর্বোত্তম মিলন রেখা।

$x = nrh$ মানের অনুরূপ y এর মান নীচে দেওয়া হল।

$$y = \sum_{k=0}^{n}\left[6r(2k+n) + 2(n-3k+1)\right] y_k/(n+1)(h+2) \quad \cdots \quad (8.21)$$

কিন্তু যদি অনুপাত $\frac{2}{3} : \frac{1}{3}$ না নিয়ে $r : (1-r)$ অনুপাত নেওয়া যায়, nrh এর অনুরূপ y স্থানাঙ্ক হবে, নিম্নরূপ :

$$\frac{[n-(n-1)\,r]y'_n - n(1-r)\,y'_{n-1}}{r} = y_n \quad \cdots \quad \cdots \quad (8.22)$$

(8.22) হতে পাই

$$y'_n = \frac{ry_n}{[n-(n-1)r]} + \frac{n(1-r)n'_n - 1}{[n-(n-1)r]} \quad \ldots \quad \ldots \quad (8.23)$$

(8.21) এবং (8.23) হতে y_n এর সহগ তুলনা করলে পাই

$$\frac{6rn+2(1-n)}{(n+1)(n+2)} = \frac{r}{n-(n-1)r} \quad \ldots \quad (8.24)$$

অর্থাৎ
$$\frac{[6rn+2(1-n)][n-(n-1)r]}{(n+1)(n+2)} = r \quad \ldots \quad (8.25)$$

$n=2$ বসিয়ে পাই

$$\frac{(12r-2)(2-r)}{3.4}$$

বা
$$(6r-1)(2-r) = 6r$$

অর্থাৎ,
$$r = \tfrac{2}{3},\ \tfrac{1}{2} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (8.26)$$

কাজেই $\frac{2}{3}$ সুরু করবার পক্ষে সুবিধাজনক অনুপাত। গ্রন্থপঞ্জীতে উইলসন্ [7] এর নাম উল্লেখ করা হল।

7. ইতিপূর্বে বিশদরূপে সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের নিরুদ্দেশ্যে অঙ্কনের সম্ভাব্যতা আলোচনা করেছি। স্বভাবতঃই প্রশ্ন জাগে যে কিরূপে স্থূলকোণী ত্রিভ্‌জ নিরুদ্দেশ্যে আঁকবার সম্ভাব্যতা জ্যামিতির সাহায্যে নির্ণয় করা যায়। আমরা কোণের মানের নিরুদ্দেশ্যতাই পছন্দ করলাম যাদের মানের যোগফল 180°। 180° কে সুবিধার জন্য একক ধরে নিলাম। তিনটি কোণের মানকে যদি x, y, z দিয়ে নির্দিষ্ট করি

$$x \geqslant y \geqslant 1-x-y \ (x<1,\ 1-x-y>0) \quad \ldots \quad (8.27)$$

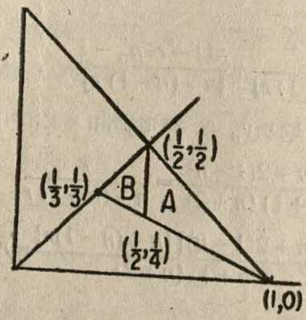
(x, y) বিন্দুগুলিকে একটি তলে উপস্থাপিত করলে একটি ত্রিভ্‌জকে নির্দিষ্ট করবে। (x, y) এর দেশের পরিসীমাগুলি যথাক্রমে,

$$x+y \leqslant 1,\ x \geqslant y,\ x=y=1-x-y \quad \ldots \quad (8.28)$$

8.11 নং চিত্র দ্রষ্টব্য।

(x, y) বিন্দুর নমুনার দেশের পরিমাপ $(1, 0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ও $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ বিন্দু তিনটি দিয়ে পরিসীমিত ত্রিভ্‌জ। এই নমুনা দেশের ত্রিভ্‌জকে স্থূলকোণী হতে হলে বৃহত্তম বাহুর বিপরীত কোণকে স্থূলকোণ ধরে নিলাম। $(1, 0)$ এবং $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ বিন্দু দিয়ে সরলরেখার সমীকরণ

$$x = 1-2y \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (8.29)$$



8.11 নং চিত্র

যদি $x=\frac{1}{2}$ হয় $y=\frac{1}{4}$। অতএব $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ বিন্দুটি $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ বিন্দুর ঠিক নীচে অবস্থিত এবং এই বিন্দুটি (8.29) সরলরেখার উপর অবস্থিত। ত্রিভুজ স্থূলকোণী হওয়ার শর্ত

$$x^2 > y^2+(1-x-y)^2 \qquad \cdots \qquad \cdots \quad (8.30)$$

অর্থাৎ, $$(1-y)(2x+y-1) > y^2$$

বা, $$(2x+y-1) > y \cdot \frac{y}{1-y} \qquad \cdots \qquad \cdots \quad (8.31)$$

যেহেতু, $\frac{y}{1-y} > 1$, (8.31) হতে

$$2x+y-1 > y \quad \text{অর্থাৎ}, \; x > \tfrac{1}{2}।$$

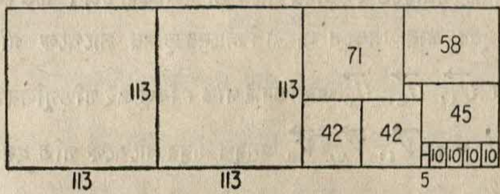
অতএব যে অঞ্চলটিতে ত্রিভুজগুলি স্থূলকোণী, তার ক্ষেত্রফল একটি ত্রিতুজের ক্ষেত্রফলের সমান, যে ত্রিভুজের শীর্ষ বিন্দুগুলি $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, $(1, 0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$। কাজেই ত্রিভুজ নিরুদ্দেশ্যে কোণ আঁকলে স্থূলকোণী হওয়ার সম্ভাব্যতাঙ্ক $\frac{A}{A+B}$ (8.11 নং চিত্র)।

A ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$

B ক্ষেত্রফল $= {}^{1} \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{48}$

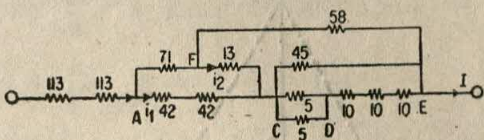
কাজেই $A+B=\frac{1}{12}$ এবং সম্ভাব্যতাঙ্ক $=\frac{A}{A+B}=\frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{12}}=\frac{3}{4}$। আমরা অনুরূপ স্থূলকোণী ত্রিভুজের অঙ্কনের সম্ভাব্যতার প্রশ্ন চিন্তা করতে পারি যদি পরিসীমা স্থির থাকে। এরূপ প্রশ্নের আলোচনার জন্য গ্রিজ্‌ম্যান [8] এর উল্লেখ করা হল।

8. এর পরে জ্যামিতির প্রয়োগ হিসাবে একটি আয়তক্ষেত্রকে কয়েকটি বর্গক্ষেত্রের যোগফল রূপে প্রকাশ করে কিভাবে একটি তড়িৎবাহী পাতের রোধকে কতকগুলি তড়িৎবর্তের রোধের লব্ধিরূপে প্রকাশ করা যায়। আয়তক্ষেত্রাকার পাতটিকে নেওয়া হল 355 × 113। জ্যামিতিক চিত্রের জন্য 8.12 নং চিত্র দ্রষ্টব্য। পাতের প্রত্যেক



8.12 নং চিত্র

একক বর্গক্ষেত্রের রোধের পরিমাণ একক ধরা হয়েছে সম্পূর্ণ পাতের রোধ নিম্নের তড়িৎবাহী বর্তজালের রোধের লব্ধিরূপে প্রকাশ করা যেতে পারে। 8.13 নং চিত্র দ্রষ্টব্য।



8.13 নং চিত্র

ধরা যাক R, AE এর লব্ধি রোধ।

$$\left.\begin{aligned}(I-i_1-i_2)-\tfrac{9}{11}(i_1+i_2)-i_2&=0,\\(I-i_1)+i_2-2i_1&=0\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad \ldots \quad (8.32)$$

(8.32) হতে পাই

$$i_1=\frac{42}{113}I,\quad i_2=\frac{13\,I}{113} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (8.33)$$

পুনরায়

$$RI=2I-2i_1-i_2=\left(2-\tfrac{84}{113}-\tfrac{13}{113}\right)I=\tfrac{129}{113}I$$

অর্থাৎ

$R_{AE}=\frac{129}{113}$। অতএব সম্পূর্ণ পাতের লব্ধি রোধ

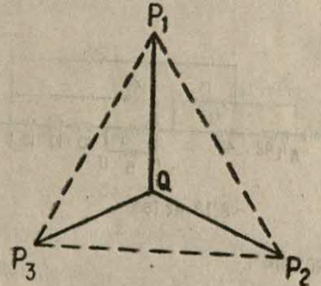
$2+\frac{129}{113}=\frac{355}{113}$ এবং এটি π এর আসন্নমান।

অনুরূপ উদাহরণের জন্য গ্রন্থপঞ্জীতে মুলিন [9] এর উল্লেখ হল।

9. এবার আবার একটি বলবিজ্ঞান হতে জ্যামিতির প্রয়োগ দেখাব। এরোপ্লেনে যেতে যেতেই কি করে বায়ুর গতি নির্ণয় করা যায় তার একটি প্রণালীর বিবরণ দেব। ধরা যাক বিমানটি তিনটি কাছাকাছি স্টেসন স্পর্শ করেছে এবং এই তিনটি স্টেসন একটি ত্রিভুজ সৃষ্টি করেছে। একটি স্টেসন হতে অপর কাছাকাছি স্টেসনের দূরত্ব অল্প ধরা হল এবং সেখানে পৌঁছতে কত সময় লাগে তা লক্ষ্য করা হল। এক স্টেসন হতে অপর স্টেসনের দূরত্ব জানা থাকলে আমরা বিমানের ভূমির সাপেক্ষে গতি জানতে পারব। ধরা যাক $\vec{U}_1$, $\vec{U}_2$, $\vec{U}_3$ এই তিনটি গতি। কিন্তু এই গতিগুলির সঙ্গে বায়ুর গতি যুক্ত আছে। যদি $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$, $\vec{V}_3$ অনুরূপ বায়ুর সাপেক্ষে গতি হয় এবং $\vec{W}$ বায়ুর গতি হয়,

$$\vec{V}_1=\vec{U}_1-\vec{W},\ \vec{V}_2=\vec{U}_2-\vec{W},\ \vec{V}_3=\vec{U}_3-\vec{W} \quad \ldots \quad (8.34)$$

8.14 নং চিত্র দ্রষ্টব্য। লক্ষ্যণীয় যে $|\vec{V}_1|=|\vec{V}_2|=|\vec{V}_3|$ কারণ



8.14নং চিত্র

বিমানের বায়ু সাপেক্ষে গতি একই। অতএব,

$$|\vec{U}_1-\vec{W}|=|\vec{U}_2-\vec{W}|=|\vec{U}_3-\vec{W}| \quad \ldots \quad (8.35)$$

যদি P_1, P_2, P_3 বিন্দুগুলি $\vec{U}_1$, $\vec{U}_2$, $\vec{U}_3$ ভেক্টরের প্রান্তবিন্দু হয় এবং যদি $\vec{W}$ ভেক্টরের প্রান্ত Q হয়, (8.35) হতে পাই যে Q বিন্দু $P_1P_2P_3$ ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র হবে। Q বিন্দুতে P_1P_2, P_2P_3 এর লম্বদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের মিলনবিন্দু। অতএব

$$|\vec{V}_i|=P_iQ\ (i=1, 2, 3)\text{।} \quad \ldots \quad (8.36)$$

এরূপ অন্যান্য উদাহরণের জন্য গ্রন্থপঞ্জীতে ক্লামকিন [10] এর উল্লেখ করা হল।

প্রশ্নমালা

1. যদি ত্রিভুজের পরিসীমা এককরূপে স্থির থাকে, প্রমাণ কর যে নিরুদ্দেশ্যে অঙ্কিত স্থূলকোণী ত্রিভুজ আঁকবার সম্ভাব্যতাঙ্ক $9-12 \log 2 \simeq 0.682$ (আসন্নমান)। $\left[\right.$সমাধানের ইঙ্গিত : $x=\frac{1}{2(1-y)}-y$ স্থূলকোণী দেশ নির্দেশ করে$\left.\right]$

2. যদি $\overrightarrow{V}$ বিমানের ভূমি অপেক্ষা গতি নির্দেশ করে এবং $\overrightarrow{W}$ বায়ুর গতি নির্দেশ করে এবং $\overrightarrow{1}$ বিমানের বায়ু অপেক্ষা গতি নির্দেশ করে, প্রমাণ কর যে (0, 0) হতে (a, b) বিন্দু পৌঁছতে সর্বাপক্ষা অল্প সময়ের পথ $y=\frac{bx}{a}$ দিয়ে নির্দিষ্ট হবে।

3. একটি সূচের দৈর্ঘ্য a এবং সমান্তরাল জালের সাধারণ দূরত্ব d। প্রমাণ কর যে এই সূচটিকে নিরুদ্দেশ্যে ছুঁড়ে দিলে একটি সমান্তরাল রেখাজোড়া অতিক্রম করে যাওয়ার সম্ভাব্যতা $\frac{2a}{\pi d}$ যদি $a \leqslant d$ এবং যদি $a \geqslant d$ এই সম্ভাব্যতাঙ্ক $\frac{2a}{\pi d}(1-\cos \alpha)+\left(1-\frac{2\alpha}{\pi}\right)$ যখন $\alpha=\sin^{-1}\left(\frac{d}{a}\right)$।

———

There is no branch of Mathematics however abstract that will not eventually be applied to phenomenon of real world.

—N. I. Lobachevsky

—Mathematicians on Mathematics

গ্রন্থপঞ্জী

1. কাণ্ডি, এইচ্. ও রোলেট, এ. পি.—Mathematical Models (1961) (অক্স্ফোর্ড্)।
2. সেডেল, ভি এবং ফলি, ভি.—সায়েন্টিফিক্ আমেরিকান 66 (1982) পৃঃ 261-266।
3. ফ্রিম্যান্, জে. জি.—[1] 59 (1975) পৃঃ 41-44।
4. বাডেন, এফ্.—(1) 66 (1982) পৃঃ 4-10।
5. ফ্লেচার, সি. আর.—[1] 55 (1971) পৃঃ 421-422।
6. দিবেকর, এল. আর.—[1] 68 (1978) পৃঃ 294-295।
7. উইলসন, জে. বি.—[2] 75 (1968) পৃঃ 773-775।
8. গ্রিজ্ম্যান্ এন্. টি.—[2] 75 (1968) পৃঃ 64-65।
9. মুলিন্, এ. এ.—[2] 75 (1968) পৃঃ 178-182।
10. ক্লাম্কিন্ এম্. এস—[2] 76 (1969) পৃঃ 16-63, 1013-1019।

———

'প্রাথমিক জ্যামিতির অঙ্কনের সৌন্দর্য ও যন্ত্রবিদ্যার শ্রেষ্ঠ নিদর্শন' মনোগ্রাফ বইতে প্রথমে জ্যামিতিক চিত্রের বিভিন্ন গঠনপ্রণালী ও তার গাণিতিক ভিত্তি আলোচিত হয়েছে। পরে যেসব কৌতুহলোদ্দীপক উপপাদ্য নতুন দিক খুলেছে বা দীর্ঘ আলোচনার বিষয় হয়েছিল তা লেখা হয়েছে। অঙ্কনের দিকেও সেরূপ সম্পাদ্যগুলি সন্নিবেশিত হয়েছে। বৃহত্তম বা ক্ষুদ্রতম উপাদান অঙ্কনের পদ্ধতিগুলির পর জ্যামিতির সঙ্গে পাটীগণিতের যোগযুক্ত অঙ্কন কয়েকটি সংখ্যায় দেখান হয়েছে। এরপর ঘনবস্তুর বিভিন্ন সুষম বা বিশেষত্বমণ্ডিত আকারগুলিকে আনা হয়েছে এবং তাদের মডেল তৈরীর প্রণালী বিস্তৃতভাবে গাণিতিক কারণসহ আলোচিত হয়েছে। জ্যামিতির বিভিন্নদিকে ফলিতপ্রয়োগ শেষে যুক্ত হয়েছে। মাধ্যমিক বা উচ্চমাধ্যমিক স্তরের জ্যামিতির যে সৃজনাত্মক দিক রয়েছে ও এই সৃজনশীলতায় কত জ্যামিতিক সৌন্দর্য সৃষ্টি সম্ভব হতে পারে সেটাই প্রয়োজনীয় বিস্তৃতির সাথে দেখান আছে।

আঠাশ টাকা